Лекция 4. Полнота. Некоторые полные системы. Замыкание. Замкнутые классы. Замкнутость классов T_0, T_1, L, S, M.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Полная система

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **полной системой**, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.

Полнота системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$

Предложение 4.1. *Система* $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ *является полной*.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

1. Если $f = 0$, то $f = \bar{x} \cdot x$.

2. Если $f \neq 0$, то представим f ее совершенной ДНФ.

$\square$

Полнота системы $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$

Предложение 4.2. *Система* $A = \{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$ *является полной*.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

1. Если $f = 0$, то $f = x \oplus x$.

2. Если $f \neq 0$, то представим f ее полиномом Жегалкина.

$\square$

Лемма о двух системах

Покажем полноту некоторых других систем.

Для доказательства полноты нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $A, B \subseteq P_2$. Если B — полная система и каждая функция из B выражается формулой над множеством A, то A — также полная система.*

Лемма о двух системах

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

Система B — полна, поэтому найдется некоторая формула F над множеством B, которая выражает функцию f.

Пусть в формуле F встречаются только функции $g_1, \dots, g_t \in B$, т. е. $F = F[g_1, \dots, g_t]$.

По условию утверждения каждая функция $g_i \in B$ может быть выражена некоторой формулой G_i над множеством A, $i = 1, \dots, t$.

Тогда, подставив в формулу F вместо каждой функции g_i формулу G_i, получим формулу $F[G_1, \dots, G_t]$ над множеством A, которая выражает функцию f.

$\square$

Некоторые полные системы

Теорема 4.1. *Следующие множества являются полными системами:*

$$
\begin{array}{ll}
1. & A = \{\bar{x}, x \cdot y\}, \\
2. & A = \{\bar{x}, x \vee y\}, \\
3. & A = \{x / y\}, \\
4. & A = \{x \downarrow y\}.
\end{array}
$$

Некоторые полные системы

Доказательство. Применим лемму о двух системах.

1. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A: $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$.

2. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A: $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$.

3. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, \bar{x}\}$ формулами над A: $\bar{x} = x/y$, $x \cdot y = \overline{x/y} = (x/y)/(x/y)$.

4. Выразим все функции из полной системы $\{x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A: $\bar{x} = x \downarrow y$, $x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$.

$\square$

Полная система

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **полной системой**, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.

А как проверить полноту заданной системы A?

Оказывается, что можно рассматривать **замкнутые классы**.

Замыкание множества

Пусть $A \subseteq P_2$. **Замыканием** $[A]$ множества A называется множество всех функций, которые могут быть выражены формулами над A.

Свойства замыкания множества

Для произвольных множеств $A, B \subseteq P_2$ верны следующие свойства:

1. $[P_2] = P_2$,
2. $A \subseteq [A]$,
3. если $A \subseteq B$, то $[A] \subseteq [B]$,
4. $[[A]] = [A]$.

Замкнутый класс

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **замкнутым классом**, если $[A] = A$.

Из свойств замыкания множества следует, что если $A = [B]$ для некоторого множества B, $B \subseteq P_2$, то A — замкнутый класс.

В частности, P_2 — замкнутый класс.

Замкнутые классы и полнота

Предложение 4.3. *Пусть $A \subseteq P_2$, A — замкнутый класс и $A \neq P_2$. Тогда для любого множества B, $B \subseteq P_2$, верно: если $B \subseteq A$, то B — не полная система.*

Доказательство. Итак,

$$B \subseteq A.$$

По свойствам замыкания и из условия получаем:

$$[B] \subseteq [A] = A \neq P_2.$$

Значит, $[B] \neq P_2$, т. е. B — не полная система.

□

Функции, сохраняющие константу 0

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ **сохраняет** 0, если

$$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Множество всех функций, сохраняющих 0, обозначим T_0.

Отметим, что $x \in T_0$.

Заметим, что $T_0 \neq \emptyset$, т. к., например, $0, x \oplus y, x \cdot y \in T_0$, и $T_0 \neq P_2$, т. к., например, $1, \bar{x}, x \sim y \notin T_0$.

Замкнутость T_0

Теорема 4.2. *Множество T_0 является замкнутым классом.*

Доказательство. Пусть $f_0(y_1, \dots, y_m) \in T_0$ и $f_i(x_1, \dots, x_n) \in T_0$, $i = 1, \dots, m$, причем функции f_i, $i = 1, \dots, m$, могут зависеть несущественно от некоторых своих переменных.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Получаем:

$$\begin{aligned} f(0, \dots, 0) &= f_0(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0)) = \\ &= f_0(0, \dots, 0) = 0, \end{aligned}$$

т. к. $f_i \in T_0$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $f_0 \in T_0$.

Значит, $f \in T_0$.

Функции, сохраняющие константу 1

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ **сохраняет** 1, если

$$f(1, \ldots, 1) = 1.$$

Множество всех функций, сохраняющих 1, обозначим T_1.

Отметим, что $x \in T_1$.

Заметим, что $T_1 \neq \emptyset$, т. к., например, $1, x \sim y, x \cdot y \in T_1$, и $T_1 \neq P_2$, т. к., например, $0, \bar{x}, x \oplus y \notin T_1$.

Замкнутость T_1

Теорема 4.3. *Множество* T_1 *является замкнутым классом.*

Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Линейные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется **линейной**, если она может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$.

Другими словами, функция f — линейна, если в ее полиноме Жегалкина нет слагаемых хотя бы с двумя переменными (т. е. ранга, большего единицы).

Множество всех линейных функций обозначим L.

Отметим, что $x \in L$.

Заметим, что $L \neq \emptyset$, т. к., например, $0, \bar{x}, x \oplus y \in L$, и $L \neq P_2$, т. к., например, $x \cdot y, x \vee y = xy \oplus x \oplus y \notin L$.

Замкнутость L

Теорема 4.4. *Множество L является замкнутым классом.*

Доказательство. Достаточно заметить, что при при подстановке вместо переменных линейной функции каких-то других линейных функций не могут появиться конъюнкции переменных в слагаемых. Поэтому при такой подстановке получается линейная функция.

$\square$

Двойственная функция

Функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется **двойственной** к функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, если

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}.$$

Отметим, что для любой функции $f \in P_2$ верно $(f^*)^* = f$.

Следовательно, все функции алгебры логики можно разбить на пары двойственных друг к другу функций.

Пары двойственных функций

Найдем некоторые пары двойственных функций:

$f \in P_2$	$f^* \in P_2$	названия функций
0	$\bar{0} = 1$	константы 0 и 1
x $\bar{x}$	$\bar{\bar{x}} = x$ $\bar{\bar{\bar{x}}} = \bar{x}$	тождественная функция отрицание
$x \cdot y$ $x \oplus y$ x / y	$\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x \vee y$ $\overline{\bar{x} \oplus \bar{y}} = x \sim y$ $\overline{\bar{x} / \bar{y}} = x \downarrow y$	конъюнкция и дизъюнкция сложение по mod 2 и эквивалентность штрих Шеффера и стрелка Пирса

Самодвойственные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется **самодвойственной**, если

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Другими словами, функция f — самодвойственна, если двойственная к ней функция с ней совпадает.

Самодвойственные функции

Наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ назовем **противоположными**, если они отличаются во всех n разрядах.

Отметим, что для любого набора $\alpha \in E_2^n$ противоположный ему набор определен однозначно; обозначим его $\bar{\alpha}$.

Перепишем равенство прямой и двойственной функций в виде:

$$f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Теперь для любого набора $\alpha \in E_2^n$ получаем:

$$f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}.$$

Значит, функция f — самодвойственна тогда и только тогда, когда на всех парах противоположных наборов она принимает противоположные значения.

Самодвойственные функции

Множество всех самодвойственных функций обозначим S.

Отметим, что $x \in S$.

Заметим, что $S \neq \emptyset$, т. к., например, $x, \bar{x} \in S$, и $S \neq P_2$, т. к., например, $0, 1, x \cdot y \notin S$.

Замкнутость S

Теорема 4.5. *Множество S является замкнутым классом.*

Доказательство. Пусть $f_0(y_1,\dots,y_m)\in S$ и $f_i(x_1,\dots,x_n)\in S$, $i=1,\dots,m$, причем функции f_i, $i=1,\dots,m$, могут зависеть несущественно от некоторых своих переменных.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1,\dots,x_n)=f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)).$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
\overline{f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)} &= \overline{f_0(f_1(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n),\dots,f_m(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n))} = \\
&= \overline{f_0(\overline{\overline{f_1(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)}},\dots,\overline{\overline{f_m(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)}})} = \\
&= \overline{f_0(\overline{f_1(x_1,\dots,x_n)},\dots,\overline{f_m(x_1,\dots,x_n)})} = \\
&= f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) = f(x_1,\dots,x_n),
\end{aligned}$$

т. к. $f_i\in S$ для всех $i=1,\dots,m$ и $f_0\in S$.

Монотонные функции

Если $\alpha, \beta \in E_2^n$, то скажем, что $\alpha \leqslant \beta$ при $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется **монотонной**, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$ из $\alpha \leqslant \beta$ следует $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Множество всех монотонных функций обозначим M.

Отметим, что $x \in M$.

Заметим, что $M \neq \emptyset$, т. к., например, $0, 1, x \in M$, и $M \neq P_2$, т. к., например, $\bar{x} \notin M$.

Свойство немонотонной функции

Наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ назовем **соседними**, если они отличаются только в одном разряде.

Предложение 4.4. *Если* $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$, *то найдутся два таких* **соседних** *набора* $\alpha, \beta \in E_2^n$, *что* $\alpha \leqslant \beta$, *но* $f(\alpha) > f(\beta)$.

Доказательство проведите самостоятельно.

Значит, функция f — монотонна тогда и только тогда, когда на всех парах соседних наборов она принимает значения, не нарушающие монотонность.

Замкнутость M

Теорема 4.6. *Множество M является замкнутым классом.*

Доказательство. Пусть $f_0(y_1, \ldots, y_m) \in M$ и $f_i(x_1, \ldots, x_n) \in M$, $i = 1, \ldots, m$, причем функции f_i, $i = 1, \ldots, m$, могут зависеть несущественно от некоторых своих переменных.

Замкнутость M

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Пусть $\alpha, \beta \in E_2^n$ и $\alpha \leqslant \beta$. Тогда:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f_0(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = f_0(\gamma), \\ f(\beta) &= f_0(f_1(\beta), \dots, f_m(\beta)) = f_0(\delta), \end{aligned}$$

где $\gamma, \delta \in E_2^m$, $f_i(\alpha) = \gamma_i$, $f_i(\beta) = \delta_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Но $f_1, \dots, f_m \in M$, поэтому $\gamma_i \leqslant \delta_i$ для всех $i = 1, \dots, m$, а значит, $\gamma \leqslant \delta$.

Но $f_0 \in M$, поэтому $f_0(\gamma) \leqslant f_0(\delta)$, а значит, $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Следовательно, $f \in M$.

$\square$

Проверка принадлежности функции к T_0, T_1, L, S, M

Отметим, что для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ алгоритмы проверки ее принадлежности к каждому из классов

$$T_0, \ T_1, \ L, \ S, \ M$$

можно построить на основе условий, определяющих наличие у функции каждого из этих свойств.

1. Сохранения константы: нужно проверить, что $f(0, \ldots, 0) = 0$ или, соответственно, $f(1, \ldots, 1) = 1$.

2. Линейность: можно найти коэффициенты полинома Жегалкина функции f и проверить, что $c_f(\alpha) = 0$ для всех таких $\alpha \in E_2^n$, что $|\alpha| \geqslant 2$.

Проверка принадлежности функции к T_0, T_1, L, S, M

3. Самодвойственность: можно проверить, что на всех парах противоположных наборов f принимает противоположные значения.

4. Монотонность: можно проверить, что на всех парах соседних наборов f принимает значения, не нарушающие монотонность.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите теорему 4.3 и предложение 4.4.

2. Покажите, что если таблицу наборов из E_2^n, $n \geqslant 1$, разделить линией пополам, то все пары противоположных наборов будут находиться симметрично относительно этой линии. На основе этого наблюдения опишите алгоритм проверки принадлежности функции $f \in P_2^{(n)}$, $n \geqslant 1$, к классу S по ее вектору значений $\alpha_f \in E_2^{2^n}$.