Лекция 5. Леммы о несамодвойственной, немонотонной и нелинейной функциях. Полнота. Теорема Поста о полноте.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Самодвойственные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ — **самодвойственна**, если

$$f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)},$$

т. е. когда на всех парах противоположных наборов она принимает противоположные значения.

Лемма о несамодвойственной функции

Лемма 5.1 (о несамодвойственной функции). *Если $f \notin S$, то, подставляя вместо ее переменных функции x, $\bar{x}$, можно получить функцию, равную константе.*

Лемма о несамодвойственной функции

Доказательство. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S$, то найдется такая пара противоположных наборов $\alpha, \bar{\alpha} \in E_2^n$, что

$$f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = c \in E_2.$$

Положим:

$$\varphi(x) = f(x \oplus \alpha_1, \ldots, x \oplus \alpha_n).$$

Отметим, что вместо переменной x_i подставили x при $\alpha_i = 0$ и подставили $\bar{x}$ при $\alpha_i = 1$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(0 \oplus \alpha_1, \ldots, 0 \oplus \alpha_n) = f(\alpha) = c, \\ \varphi(1) &= f(1 \oplus \alpha_1, \ldots, 1 \oplus \alpha_n) = f(\bar{\alpha}) = c. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi(x) = c$. $\square$

Лемма о несамодвойственной функции

Пример. Рассмотрим несамодвойственную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Т. к. $f(0,1,0) = f(1,0,1) = 1$, получаем $\varphi(x) = f(x, \bar{x}, x)$.

Теперь $\varphi(0) = f(0,1,0) = 1$, $\varphi(1) = f(1,0,1) = 1$, т. е. $\varphi(x) = 1$.

Монотонные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ — **монотонна**, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$ из $\alpha \leqslant \beta$ следует $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Лемма о немонотонной функции

Лемма 5.2 (о немонотонной функции). *Если $f \notin M$, то, подставляя вместо ее переменных функции* 0, 1, x *можно получить функцию* $\bar{x}$.

Лемма о немонотонной функции

Доказательство. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$, то найдется такая пара наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$, что $\alpha \leqslant \beta$, но $f(\alpha) > f(\beta)$.

Значит, $f(\alpha) = 1$ и $f(\beta) = 0$.

Не ограничивая общности рассуждений, пусть $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$ и $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i = k + 1, \ldots, n$, где $1 \leqslant k \leqslant n$.

Лемма о немонотонной функции

Доказательство. Положим:

$$\varphi(x) = f(\underbrace{x, \dots, x}_{k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Отметим, что вместо переменной x_i подставили x при $i = 1, \dots, k$ и подставили 0 или 1 при $i = k+1, \dots, n$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha) = 1, \\ \varphi(1) &= f(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi(x) = \bar{x}$.

$\square$

Лемма о немонотонной функции

Пример. Рассмотрим немонотонную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Т. к. $f(0,0,1) = 1$, $f(1,1,1) = 0$, получаем $\varphi(x) = f(x,x,1)$.

Теперь $\varphi(0) = f(0,0,1) = 1$, $\varphi(1) = f(1,1,1) = 0$, т. е. $\varphi(x) = \bar{x}$.

Свойство немонотонной функции

Напомним, что наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ называются **соседними**, если они отличаются только в одном разряде.

Предложение 5.1. *Если* $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$*, то найдутся два таких* **соседних** *набора* $\alpha, \beta \in E_2^n$*, что* $\alpha \leqslant \beta$*, но* $f(\alpha) > f(\beta)$.

Доказательство проведите самостоятельно.

Значит, функция f — монотонна тогда и только тогда, когда на всех парах соседних наборов она принимает значения, не нарушающие монотонность.

Линейные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ — **линейна**, если она может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$, т. е. если в ее полиноме Жегалкина нет слагаемых хотя бы с двумя переменными.

Лемма о нелинейной функции

Лемма 5.3 (о нелинейной функции). *Если* $f \notin L$, *то, подставляя вместо ее переменных функции* 0, 1, x, $\bar{x}$, y, $\bar{y}$ *можно получить функцию* $x \cdot y$ *или функцию* $\overline{x \cdot y}$.

Лемма о нелинейной функции

Доказательство. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$, то в ее полиноме Жегалкина найдется слагаемое ранга, не меньшего двух.

Не ограничивая общности рассуждений, пусть в полиноме Жегалкина функции f содержится слагаемое $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$, где $k \geqslant 2$.

Представим полином Жегалкина функции f в виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 \cdot g_1(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1 \cdot g_2(x_3, \ldots, x_n) \oplus \\ &\oplus x_2 \cdot g_3(x_3, \ldots, x_n) \oplus g_4(x_3, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

где $g_1, g_2, g_3, g_4 \in P_2$, причем $g_1 \neq 0$.

Значит, найдется такой набор $\alpha \in E_2^{n-2}$, что $g_1(\alpha) = 1$.

Лемма о нелинейной функции

Доказательство. Пусть $g_2(\alpha) = a$, $g_3(\alpha) = b$, $g_4(\alpha) = c$, где $a, b, c \in E_2$.
Тогда

$$f(x_1, x_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}) = x_1 x_2 \oplus a x_1 \oplus b x_2 \oplus c.$$

Положим:

$$\psi(x, y) = f(x \oplus b, y \oplus a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}).$$

Отметим, что вместо переменной x_1 подставили x или $\bar{x}$, вместо переменной x_2 подставили y или $\bar{y}$ и вместо переменных x_i при $i = 3, \ldots, n$ подставили 0 или 1.

Лемма о нелинейной функции

Доказательство. Получаем:

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= (x\oplus b)(y\oplus a)\oplus a(x\oplus b)\oplus b(y\oplus a)\oplus c = \\ &= (xy\oplus ax\oplus by\oplus ab)\oplus(ax\oplus ab)\oplus(by\oplus ab)\oplus c = \\ &= xy\oplus(ab\oplus c) = xy\oplus d,\end{aligned}$$

где $d = ab\oplus c$.

Значит,

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x\cdot y, & d=0,\\ \overline{x\cdot y}, & d=1.\end{cases}$$

□

Лемма о нелинейной функции

Пример. Рассмотрим нелинейную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

Перепишем f в виде:

$$f = x_1x_2 \cdot (x_3 \oplus 1) \oplus x_1 \cdot (0) \oplus x_2 \cdot (1) \oplus x_3.$$

Значит, $g_1(x_3) = x_3 \oplus 1$, $g_2(x_3) = 0$, $g_3(x_3) = 1$, $g_4(x_3) = x_3$.

Заметим, что $g_1(0) = 1$. Тогда:

$$a = g_2(0) = 0, \;\; b = g_3(0) = 1, \;\; c = g_4(0) = 0.$$

Получаем:

$$\psi(x, y) = f(\bar{x}, y, 0) = (x \oplus 1)y \oplus y = x \cdot y.$$

Теорема Поста

Напомним, что множество A, $A \subseteq P_2$, называется **полной системой**, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.

Теорема 5.1 (Поста). *Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A является полной системой тогда и только тогда, когда A не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M, т. е.*

$$A \not\subseteq T_0, \ A \not\subseteq T_1, \ A \not\subseteq L, \ A \not\subseteq S, \ A \not\subseteq M.$$

Теорема Поста

Доказательство. 1. *Необходимость* обоснуем от обратного: пусть A является полной системой, но содержится в одном из классов T_0, T_1, L, S, M, например, пусть $A \subseteq T_0$.

Тогда получаем:

$$[A] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2.$$

Приходим к противоречию.

Значит, A не может содержаться ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M.

Теорема Поста

Доказательство. 2. *Достаточность*. Пусть A не содержится в одном из классов T_0, T_1, L, S, M. Докажем, что в этом случае A — полная система.

Из условия непринадлежности A к каждому из перечисленных классов следует, что в A найдутся такие функции

$$f_0, f_1, f_l, f_s, f_m,$$

что

$$f_0 \notin T_0,\ \ f_1 \notin T_1,\ \ f_l \notin L,\ \ f_s \notin S,\ \ f_m \notin M.$$

Отметим, что функции f_0, f_1, f_l, f_s, f_m не обязательно все различны.

Теорема Поста

Доказательство. Покажем, что формулами над A можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$.

Теорема Поста

Доказательство. 2.1. Построение констант 0 и 1.

Рассмотрим функции $f_0 \notin T_0$ и $f_1 \notin T_1$. Положим:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f_0(x, \dots, x), \\ \varphi_1(x) &= f_1(x, \dots, x). \end{aligned}$$

Тогда:

x	φ_0	φ_1
0	1	b
1	a	0

Теперь если $a = 1$ и $b = 0$, то $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = 0$.

Если же $a = 0$ или $b = 1$, то получена функция $\bar{x}$. Тогда по лемме о несамодвойственной функции из $f_s \notin S$, подставляя вместо ее переменных функции x, $\bar{x}$, получаем некоторую константу $c \in E_2$, а затем $\bar{c} \in E_2$.

Константы 0 и 1 построены.

Теорема Поста

Доказательство. 2.2. Построение отрицания $\bar{x}$.

По лемме о немонотонной функции из $f_m \notin M$, подставляяя вместо ее переменных функции 0, 1, x, получаем отрицание $\bar{x}$.

Отрицание $\bar{x}$ построено.

Теорема Поста

Доказательство. 2.3. Построение конъюнкции $x \cdot y$.

По лемме о нелинейной функции из $f_l \notin L$, подставляя вместо ее переменных функции 0, 1, x, $\bar{x}$, y, $\bar{y}$ и, возможно, навешивая отрицание над функцией, получаем конъюнкцию $x \cdot y$.

Конъюнкция $x \cdot y$ построена.

Теорема Поста

Доказательство. Значит, формулами над A можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$.

Следовательно, система A — полна.

$\square$

Теорема Поста

По теореме Поста можно проверять полноту систем функций из P_2.

Если задано конечное множество $A = \{f_1, \dots, f_t\} \subseteq P_2$, то можно построить таблицу со строками, соответствующими функциям $f_1, \dots, f_t$, и со столбцами, соответствующими классам T_0, T_1, L, S, M.

На пересечении строки и столбца можно записывать «$+$» или «$-$» в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит функция, которой обозначена эта строка, к классу, которым обозначен этот столбец.

По теореме Поста система A — полна, если в этой таблице в любом столбце найдется хотя бы один «минус», и не полна, если в этой таблице найдется столбец, состоящий только из «плюсов».

Теорема Поста

Пример. Проверить, является ли полной система

$$A = \{\bar{x}, x \to y\}.$$

Применим теорему Поста:

	T_0	T_1	L	S	M
$\bar{x}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x \to y$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

Значит, система A — полна.

Теорема Поста

Пример. Проверить, является ли полной система

$$A = \{\bar{x}, x \sim y\}.$$

Применим теорему Поста:

	T_0	T_1	L	S	M
$\bar{x}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x \sim y$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

Значит, система A — не полна, т. к. $A \subseteq L$.

Теорема Поста

Поразительно, но теорему Поста можно применять для проверки полноты и бесконечных множеств функций из P_2.

Теорема Поста

Пример. Проверить, является ли полной системой бесконечное множество

$$A = (S \cap M) \cup (L \setminus M).$$

Предположим, что A — полная система. Тогда по теореме Поста в A обязаны содержаться функции, не принадлежащие каждому из классов T_0, T_1, L, S, M.

Попытаемся их подобрать. Находим:

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \in L \setminus M, & \bar{x} \notin T_0, T_1, M, \\ x \oplus y \in L \setminus M, & x \oplus y \notin S, \\ xy \oplus xz \oplus yz \in S \cap M, & xy \oplus xz \oplus yz \notin L. \end{array}$$

Значит, система A — полна.

Теорема Поста

Пример. Проверить, является ли полной системой бесконечное множество

$$A = (L \setminus (T_0 \cup T_1)) \cup (S \cap T_0 \cap T_1).$$

Предположим, что A — полная система. Тогда по теореме Поста в A обязаны содержаться функции, не принадлежащие каждому из классов T_0, T_1, L, S, M.

Попытаемся их подобрать. Находим:

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \in L \setminus (T_0 \cup T_1), & \bar{x} \notin T_0, T_1, M, \\ xy \oplus xz \oplus yz \in S \cap T_0 \cap T_1, & xy \oplus xz \oplus yz \notin L. \end{array}$$

Осталось найти несамодвойственную функцию в A. Т. к. в множестве $S \cap T_0 \cap T_1$ все функции — самодвойственные, искать ее нужно в множестве $L \setminus (T_0 \cup T_1)$.

Теорема Поста

Пример (продолжение). Посмотрим, какие функции входят в множество $L \setminus (T_0 \cup T_1)$.

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in L \setminus (T_0 \cup T_1)$, то $f \in L$, т. е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$.

Кроме того, $f \notin T_0$ и $f \notin T_1$, т. е.

$$\begin{aligned} f(0, \ldots, 0) &= 1, \quad c_0 = 1, \\ f(1, \ldots, 1) &= 0, \quad 1 \oplus c_1 \oplus \ldots \oplus c_n = 0. \end{aligned}$$

Итак, если $f \in L \setminus (T_0 \cup T_1)$, то

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_1, \ldots, c_n \in E_2$ и

$$c_1 \oplus \ldots \oplus c_n = 1.$$

Теорема Поста

Пример (продолжение). Найдем двойственную функцию к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} f^*(x_1, \ldots, x_n) &= \overline{1 \oplus c_1\bar{x}_1 \oplus \ldots \oplus c_n\bar{x}_n} = \\ &= 1 \oplus c_1(x_1 \oplus 1) \oplus \ldots \oplus c_n(x_n \oplus 1) \oplus 1 = \\ &= (1 \oplus c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n) \oplus (c_1 \oplus \ldots \oplus c_n \oplus 1) = \\ &= 1 \oplus c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n = f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Следовательно, $f^* = f$, т. е. $f \in S$ и

$$L \setminus (T_0 \cup T_1) \subseteq S.$$

Значит, система A — не полна, т. к. $A \subseteq S$.

Теорема Поста

Теорему Поста можно применять для проверки полноты множеств функций из P_2, в которых функции не явно заданы, а описаны своими свойствами.

Теорема Поста

Пример. Пусть $f \in P_2$ и формулами над $A = \{f\}$ можно выразить константы 0 и 1. Доказать, что система $A = \{f\}$ — полна.

Докажем, что $f \notin T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M$.

Теорема Поста

Пример (продолжение). Итак,

1) если $f \in T_0$, то $A \subseteq T_0$, значит,

$$[A] \subseteq [T_0] = T_0,$$

но $1 \in [A]$, $1 \notin T_0$ — противоречие, поэтому $f \notin T_0$;

2) если $f \in T_1$, то $A \subseteq T_1$, значит,

$$[A] \subseteq [T_1] = T_1,$$

но $0 \in [A]$, $0 \notin T_1$ — противоречие, поэтому $f \notin T_1$;

3) если $f \in S$, то $A \subseteq S$, значит,

$$[A] \subseteq [S] = S,$$

но $1 \in [A]$, $1 \notin S$ — противоречие, поэтому $f \notin S$.

Теорема Поста

Пример (продолжение). Далее,

4) $f \notin T_0$, $f \notin T_1$, поэтому $f \notin M$;

5) $f \notin T_0$, $f \notin T_1$, если предположить, что $f \in L$, т. е. если $f \in L \setminus (T_0 \cup T_1)$, то аналогично предыдущему примеру показываем $f \in S$ — противоречие, поэтому $f \notin L$.

Теорема Поста

Пример (продолжение). Следовательно, получаем:

	T_0	T_1	L	S	M
f	—	—	—	—	—

Значит, система $A = \{f\}$ — полна.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите предложение 5.1.

2. Проверьте, является ли множество A полной системой, если

1) $A = (M \cap T_0 \cap T_1) \cup (M \setminus (T_0 \cup T_1)) \cup \{x \oplus y \oplus z\}$;

2) $A = ((M \cap T_0) \setminus T_1) \cup ((M \cap T_1) \setminus T_0)) \cup \{x \oplus y \oplus z\}$.