

Лекция 2. Разложение функций. ДНФ, совершенная ДНФ. КНФ, совершенная КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Подфункции

Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$ и $\sigma \in E_2^k$, $1 \leq k \leq n$, то положим

$$f_\sigma(x_{k+1}, \dots, x_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Функция f_σ называется σ -подфункцией функции f по k первым переменным.

При этом функции f_0 и f_1 соответственно называются 0-подфункцией и 1-подфункцией функции f по первой переменной.

Подфункции

Пример. Найдем подфункцию f_0 и подфункцию f_1 функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1 :

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f_0(x_2, x_3) = f(0, x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3,$$

$$f_1(x_2, x_3) = f(1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_3.$$

Переменная или ее отрицание

Если $\sigma \in E_2$, то введем обозначение: $x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1; \\ \bar{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$

Отметим, что $x^\sigma = 1$ в том и только в том случае, когда $x = \sigma$.

Выражение x^σ иногда будем называть **литералом** (переменной x).

Дизъюнктивное разложение функции по переменным

Теорема 2.1. При $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_2^n$ и подставим его в левую и правую части равенства из утверждения. Получаем:

$$f(\alpha) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Дизъюнктивное разложение функции по переменным

Рассмотрим набор $\beta \in E_2^k$, где $\beta_i = \alpha_i$ для всех $i = 1, \dots, k$.
Набор σ пробегает все наборы из множества E_2^k , а набор β —
какой-то набор из E_2^k .

1. Если $\sigma \neq \beta$, то найдется такое i , $1 \leq i \leq k$, что $\sigma_i \neq \alpha_i$.
Значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, откуда в этом случае

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot 0 \cdot \alpha_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = 0.$$

2. Если $\sigma = \beta$, то для всех i , $i = 1, \dots, k$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а
значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$. Поэтому в этом случае

$$1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = 0 \vee \dots \vee 0 \vee f(\alpha) \vee 0 \vee \dots \vee 0 = f(\alpha).$$

Дизъюнктивное разложение функции по переменным

Пример. Применим дизъюнктивное разложение функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1 :

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, x_3) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, x_3) = \\ &= \bar{x}_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \vee x_1 \cdot (x_2 \vee x_3). \end{aligned}$$

Полиномиальное разложение функции по переменным

Теорема 2.2. При $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\sigma \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Доказательство повторяет доказательство предыдущего утверждения.

Полиномиальное разложение функции по переменным

Пример. Применим полиномиальное разложение функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1 :

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, x_3) \oplus x_1 \cdot f(1, x_2, x_3) = \\&= \bar{x}_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \oplus x_1 \cdot (x_2 \vee x_3).\end{aligned}$$

Конъюнктивное разложение функции по переменным

Теорема 2.3. При $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^k} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущих утверждений.

Конъюнктивное разложение функции по переменным

Пример. Применим конъюнктивное разложение функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1 :

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \vee f(0, x_2, x_3)) \cdot (\bar{x}_1 \vee f(1, x_2, x_3)) = \\ &= (x_1 \vee (x_2 \cdot x_3)) \cdot (\bar{x}_1 \vee (x_2 \vee x_3)). \end{aligned}$$

Элементарные конъюнкции

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где x_{i_1}, \dots, x_{i_k} — различные переменные и $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in E_2$, называется **элементарной конъюнкцией (ЭК)** ранга k , $k \geq 1$.

Элементарной конъюнкцией ранга 0 назовем константу 1.

Например, $1, x_2, \bar{x}_1 x_3 x_4$ — элементарные конъюнкции.

Считаем, что две ЭК совпадают, если **они отличаются только порядком входящих в них переменных**.

Дизъюнктивные нормальные формы

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины l , $l \geq 1$, назовем дизъюнкцию l различных ЭК.

Дизъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 0.

Другими словами, ДНФ называется выражение вида

$$K_1 \vee \dots \vee K_l,$$

где K_j — различные ЭК, $l \geq 1$, или константа 0.

Например, x_1x_2 , $x_2 \vee x_3$, $\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2$ — ДНФ.

Считаем, что **две ДНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭК.**

Каждая ДНФ с переменными x_1, \dots, x_n определяет какую-то функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Совершенная ДНФ

Если каждая ЭК в ДНФ содержит все переменные этой ДНФ, то такая ДНФ называется **совершенной**.

Теорема 2.4 (о совершенной ДНФ). *Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $f \neq 0$, может быть представлена в виде совершенной ДНФ D_f , а именно:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n: f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Совершенная ДНФ

Доказательство. Применим дизъюнктивное разложение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по всем n переменным:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma).$$

Набор σ пробегает все наборы из множества E_2^n .

1. Если $f(\sigma) = 0$, то

$$x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot 0 = 0.$$

2. Если $f(\sigma) = 1$, то

$$x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot 1 = x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Следовательно,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n: f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Совершенная ДНФ

Пример. Найдём совершенную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Элементарные дизъюнкции

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где x_{i_1}, \dots, x_{i_k} — различные переменные и $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in E_2$, называется **элементарной дизъюнкцией (ЭД) ранга k** , $k \geq 1$.

Элементарной дизъюнкцией ранга 0 назовем константу 0.

Например, 0, x_2 , $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$ — элементарные дизъюнкции.

Считаем, что две ЭД совпадают, если **они отличаются только порядком входящих в них переменных**.

Конъюнктивные нормальные формы

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины l , $l \geq 1$, назовем конъюнкцию l различных ЭД.

Конъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 1.

Другими словами, КНФ называется выражение вида

$$D_1 \cdot \dots \cdot D_l,$$

где D_j — различные ЭД, $l \geq 1$, или константа 1.

Например, $\bar{x}_1 \vee x_2$, $x_1 \cdot \bar{x}_3$, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$ — КНФ.

Считаем, что **две КНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭД.**

Каждая КНФ с переменными x_1, \dots, x_n определяет какую-то функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Совершенная КНФ

Если каждая ЭД в КНФ содержит все переменные этой КНФ, то такая КНФ называется **совершенной**.

Теорема 2.5 (о совершенной КНФ). *Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $f \neq 1$, может быть представлена в виде совершенной КНФ K_f , а именно:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^n: f(\sigma)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы о совершенной ДНФ, только надо рассмотреть конъюнктивное разложение функции по всем переменным.

Совершенная КНФ

Пример. Найдём совершенную КНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите теоремы 2.2, 2.3 и 2.5.
2. По аналогии с ДНФ введите полиномиальные нормальные формы (ПНФ), совершенную ПНФ и докажите теорему о представлении функции алгебры логики в виде совершенной ПНФ.