

Лекция 10. Геометрическое представление графов. Планарные графы. Формула Эйлера для планарных графов. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

# Геометрическое представление графа в $\mathbb{R}^n$

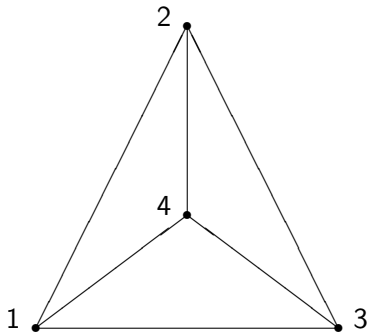
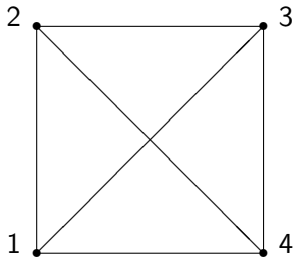
Геометрическим представлением графа  $G = (V, E)$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется такое его отображение в  $\mathbb{R}^n$ , при котором:

- 1) каждой вершине  $v \in V$  сопоставлена точка в  $\mathbb{R}^n$ , причем разным вершинам — разные точки;
- 2) каждому ребру  $(v, w) \in E$  сопоставлена непрерывная кривая, соединяющая точки, соответствующие вершинам  $v$  и  $w$ , и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам;
- 3) кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

# Геометрическое представление графа

Слева — изображение  $K_4$ , не являющееся его геометрическим представлением на плоскости.

Справа — геометрическое представление  $K_4$  на плоскости.



# Геометрическое представление графов в $\mathbb{R}^3$

**Теорема 10.1.** *Любой граф  $G$  допускает геометрическое представление в  $\mathbb{R}^3$ .*

# Геометрическое представление графов в $\mathbb{R}^3$

**Доказательство.** Пусть  $G = (V, E)$ , где  $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ ,  $E = \{e_1, \dots, e_q\}$ .

Возьмем в  $\mathbb{R}^3$  произвольную прямую  $l$  и отметим на ней  $p$  различных точек, которые обозначим  $v_1, \dots, v_p$ . Сопоставим их вершинам графа  $G$ .

Возьмем  $q$  различных плоскостей  $\pi_1, \dots, \pi_q$ , содержащих прямую  $l$ . Ребру  $e_i = (v_{i_1}, v_{i_2})$  графа  $G$  сопоставим кривую, соединяющую точки  $v_{i_1}$  и  $v_{i_2}$ , которую проведем в плоскости  $\pi_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

По построению кривые, сопоставленные ребрам, могут пересекаться только в концевых точках. Значит, получили геометрическое представление  $G$  в  $\mathbb{R}^3$ .



# Планарный граф

Граф  $G$  называется **планарным**, если найдется его геометрическое представление на плоскости (т. е. в  $\mathbb{R}^2$ ).

В обратном случае граф  $G$  называется **непланарным**.

# Грани

Геометрическое представление планарного графа в  $\mathbb{R}^2$  назовем его **укладкой на плоскости**.

Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область называется также **внешней гранью**.

# Грани

Пусть  $G$  — планарный граф и  $\Phi(G)$  — какая-то его укладка на плоскости.

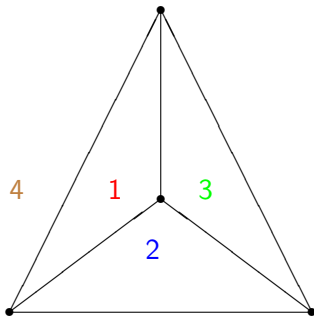
Рассмотрим двуместное отношение  $R$  на  $\mathbb{R}^2 \setminus \Phi(G)$ : если  $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \Phi(G)$ , то  $a R b$  в том и только в том случае, когда точки  $a$  и  $b$  можно соединить непрерывной кривой, не имеющей общих точек с  $\Phi(G)$ .

Отношение  $R$  — рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е.  $R$  — отношение эквивалентности на  $\mathbb{R}^2 \setminus \Phi(G)$ .

Каждый класс эквивалентности по отношению  $R$  является **гранью** в укладке  $\Phi(G)$ .



# Грани $K_4$ при его укладке на плоскости



# Формула Эйлера

**Теорема 10.2 (формула Эйлера для планарных графов).**

*Если  $G = (V, E)$  — связный планарный граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами, то для каждой его укладки на плоскости верно равенство  $p - q + r = 2$ , где  $r$  — число граней в этой укладке.*

**Доказательство** проведем индукцией по  $q$  при заданном  $p$ .

*Базис индукции:* если  $q = p - 1$ , то  $G$  — дерево.

Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

# Формула Эйлера

**Доказательство.** *Индуктивный переход:* рассмотрим связный планарный граф  $G$  с  $p$  вершинами и  $q \geq p$  ребрами. Пусть задана его укладка на плоскости, в которой  $r$  граней.

В графе  $G$  найдется хотя бы один цикл, и пусть  $e$  — любое ребро из какого-то его цикла.

Тогда граф  $G' = G - e$  — связный и планарный с  $p$  вершинами и  $q - 1$  ребрами, и его укладка на плоскости содержит  $r - 1$  граней, т. к. при удалении ребра  $e$  из укладки графа  $G$  две грани соединяются в одну.

Для графа  $G'$  верно предположение индукции, т. е.  
 $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$ , откуда  $p - q + r = 2$ .



# Наибольшее число ребер в планарных графах

**Теорема 10.3.** *Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с  $p$ ,  $p \geq 3$ , вершинами равно  $3p - 6$ .*

# Наибольшее число ребер в планарных графах

**Доказательство.** Можно рассматривать связные графы.

1. *Верхняя оценка.* Пусть  $G = (V, E)$  — связный планарный граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами.

Рассмотрим укладку графа  $G$  на плоскости, и пусть  $q_i$  — число ребер, встречающихся при обходе границы  $i$ -й грани в этой укладке,  $i = 1, \dots, r$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^r q_i = 2q$ , т. к. каждое ребро:

- 1) либо разделяет две грани, а значит, **считается при обходе границ этих двух граней**;
- 2) либо лежит в одной грани, а значит, **при обходе ее границы считается два раза**.

# Наибольшее число ребер в планарных графах

**Доказательство.** Из связности графа и  $p \geq 3$  получаем  $q_i \geq 3$ , откуда  $3r \leq 2q$ , или  $r \leq \frac{2}{3} \cdot q$ .

По формуле Эйлера  $r = q - p + 2$ , поэтому

$$q - p + 2 \leq \frac{2}{3} \cdot q,$$

а значит,

$$q \leq 3p - 6.$$

# Число ребер в планарных графах

**Доказательство. 2. Достижимость верхней оценки.** Построим графы, на которых достигается эта оценка. Это **связные планарные графы, в которых любая грань (включая внешнюю) ограничена циклом длины три**. Такие графы называются **триангуляциями**.

Если  $p = 3$ , то  $G_p = K_3$ .

Пусть уже построен связный планарный граф  $G_p$  с  $p$  вершинами и  $3p - 6$  ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником.

Тогда граф  $G_{p+1}$  получается из  $G_p$  добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами границы этой грани.



# Число граней в планарных графах

**Следствие.** *Наибольшее число граней в укладке планарного графа (без петель и кратных ребер) с  $p$ ,  $p \geq 3$ , вершинами равно  $2p - 4$ .*



# Свойство планарных графов

**Предложение 10.1.** *Любой планарный граф (без петель и кратных ребер) содержит вершину степени, не большей пяти.*

**Доказательство.** Можно рассматривать связные графы.

Докажем от обратного: пусть  $G = (V, E)$  — связный планарный граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами, в котором любая вершина имеет степень не менее шести, т. е. для любой вершины  $v \in V$  верно  $d_G(v) \geq 6$ .

Тогда по формуле Эйлера для степеней вершин получаем:

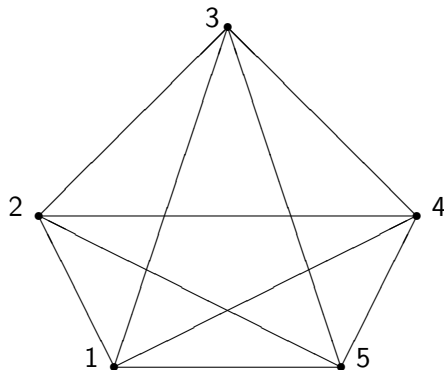
$$2q = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 6p,$$

а значит,  $q \geq 3p$ .

Но по предыдущей теореме верно  $q \leq 3p - 6$  — противоречие.

Значит, в  $G$  найдется вершина степени, не более пяти.

# Граф $K_5$



# Непланарность $K_5$

**Теорема 10.4.** *Граф  $K_5$  не является планарным.*

**Доказательство** проведем от обратного: пусть граф  $K_5$  планарен.

Тогда для произвольной его укладки на плоскости верно равенство:

$$p - q + r = 2,$$

где  $p = 5$  — число вершин и  $q = 10$  число ребер в графе, а  $r$  — число граней в этой укладке. Поэтому  $r = 7$ .

# Непланарность $K_5$

**Доказательство.** Пусть  $q_i$  — число ребер, встречающихся при обходе границы  $i$ -й грани в этой укладке,  $i = 1, \dots, r$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^r q_i = 2q$ , т. к. каждое ребро считаем дважды.

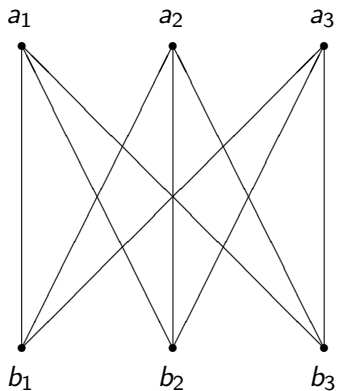
Но  $q_i \geq 3$ , поэтому  $3r \leq 2q$ , или  $r \leq \frac{2}{3} \cdot q$ .

Получаем:  $7 \leq \frac{2}{3} \cdot 10$  — противоречие.

Значит, граф  $K_5$  не является планарным.



# Граф $K_{3,3}$



# Непланарность $K_{3,3}$

**Теорема 10.5.** *Граф  $K_{3,3}$  не является планарным.*

**Доказательство** проведем от обратного: пусть граф  $K_{3,3}$  планарен.

Тогда для произвольной его укладки на плоскости верно равенство:

$$p - q + r = 2,$$

где  $p = 6$  — число вершин и  $q = 9$  число ребер в графе, а  $r$  — число граней в этой укладке. Поэтому  $r = 5$ .

Непланарность  $K_{3,3}$ 

**Доказательство.** Пусть  $q_i$  — число ребер, встречающихся при обходе границы  $i$ -й грани в этой укладке,  $i = 1, \dots, r$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^r q_i = 2q$ , т. к. каждое ребро считаем дважды.

Но  $q_i \geq 4$ , т. к. в  $K_{3,3}$  наименьшая длина цикла равна четырем, поэтому  $4r \leq 2q$ , или  $r \leq \frac{q}{2}$ .

Получаем:  $5 \leq \frac{9}{2}$  — противоречие.

Значит, граф  $K_{3,3}$  не является планарным.



# Гомеоморфизм графов

Говорят, что граф  $G' = (V', E')$  получен из графа  $G = (V, E)$  **подразбиением ребра**  $e = (v, w) \in E$ , если

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{u\}, \text{ где } u \notin V; \\ E' &= E \setminus \{(v, w)\} \cup \{(v, u), (u, w)\}. \end{aligned}$$

Граф  $G'$  называется **подразбиением** графа  $G$ , если  $G'$  может быть получен из  $G$  конечным числом подразбиений ребер.

Графы  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называются **гомеоморфными**, если найдутся изоморфные их подразделения  $G'_1$  и  $G'_2$  соответственно.



# Критерий планарности

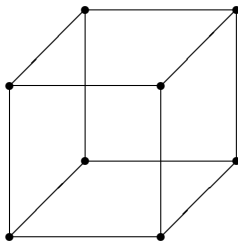
**Теорема 10.6 (критерий Понтрягина-Куратовского).**

*Граф  $G = (V, E)$  планарен тогда и только тогда, когда в нем не найдется ни одного подграфа, гомеоморфного либо графу  $K_5$ , либо графу  $K_{3,3}$ .*

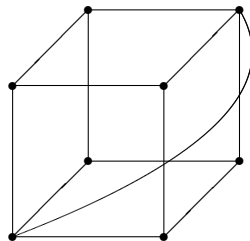
# Пример

**Пример.** Проверим, являются ли планарными следующие графы:

$G_1$  :



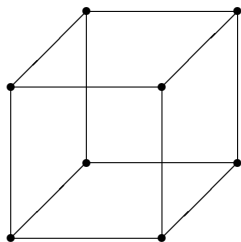
$G_2$  :



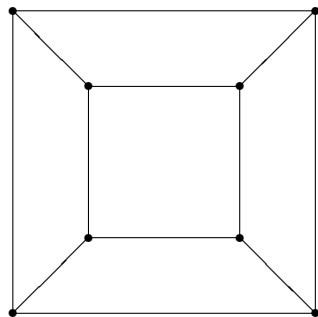
# Пример

1. Граф  $G_1$  допускает укладку  $\Phi(G_1)$  на плоскости.  
Значит,  $G_1$  — планарный граф.

$G_1$  :

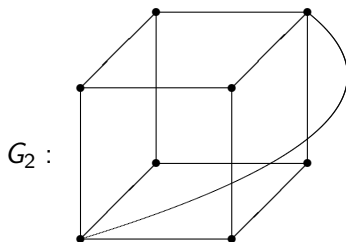


$\Phi(G_1)$  :



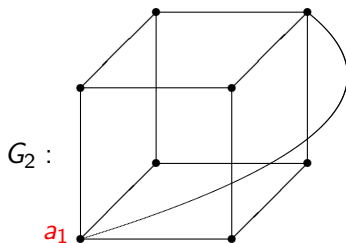
# Пример

2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :



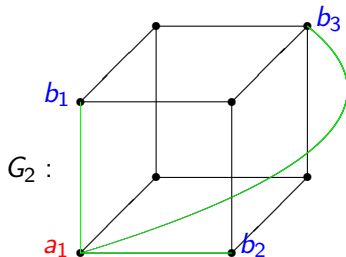
# Пример

2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :



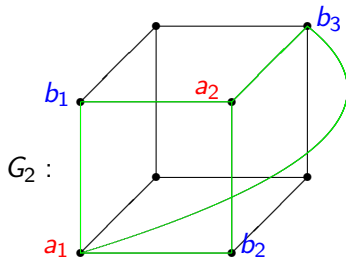
# Пример

2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :



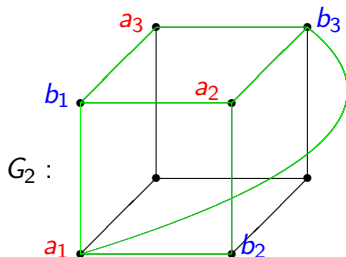
# Пример

2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :



# Пример

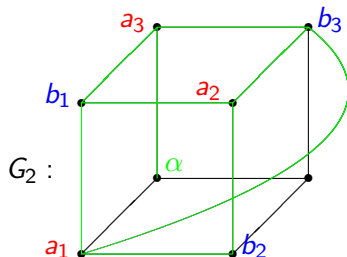
2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :





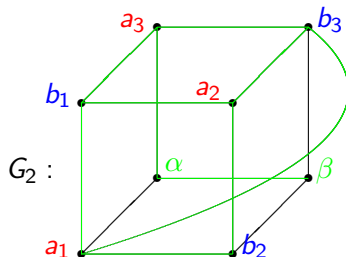
# Пример

2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :



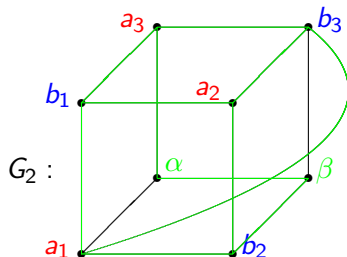
# Пример

2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :



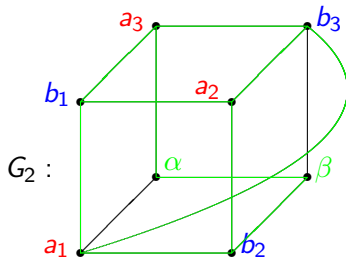
# Пример

2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :



# Пример

2. Найдем в графе  $G_2$  подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ :



Значит,  $G_2$  — непланарный граф.

## Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что наибольшее число ребер среди планарных графов (без петель и кратных ребер) содержат только триангуляции.