Лекция 1. Двоичный куб. Функции алгебры логики. Таблицы истинности. Существенность переменных. Формулы. Тождества.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Декартова (прямая) степень множества

Если A — множество и $n \geqslant 1$, то множество A^n состоит из всех упорядоченных n-ок элементов из A.

Любой элемент из A^n будем называть **набором** (**длины** n). При этом составляющие набор элементы множества A будем называть его **разрядами**, или **компонентами**.

Если a — обозначение некоторого набора из A^n (возможно, с индексами), то i-й разряд набора a будем обозначать a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

В частности, если $a_j \in A^n$, то $a_j = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,n})$.

Множество E_2^n

Введем обозначение: $E_2 = \{0, 1\}$.

В дальнейшем будем рассматривать множество E_2^n, $n \geqslant 1$. Множество E_2^n будем также называть (**единичным**) n-**мерным** (**двоичным**) **кубом**.

Любой элемент из E_2^n будем называть (**двоичным**) **набором**.

Наборы из множества E_2^n, как правило, будем обозначать греческими буквами начала алфавита: α, β и т. д., возможно, с индексами.

При этом если $\alpha \in E_2^n$, то $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; если $\alpha_j \in E_2^n$, то $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,n})$.

Множество E_2^n

Пример.

1. Пусть $n = 2$. Перечислим все наборы из множества E_2^2:

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad (1,1).$$

Всего найдется 4 набора в множестве E_2^2.

2. Пусть $n = 3$. Перечислим все наборы из множества E_2^3:

$$\begin{array}{cccc} (0,0,0), & (0,0,1), & (0,1,0), & (1,0,0), \\ (0,1,1), & (1,0,1), & (1,1,0), & (1,1,1). \end{array}$$

Всего найдется 8 наборов в множестве E_2^3.

Мощность множества E_2^n

Предложение 1.1. *Если* $n \geqslant 1$, *то* $|E_2^n| = 2^n$.

Доказательство.
Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$.
Подсчитаем, сколькими способами можно построить такой набор α.
Каждый его разряд α_i, где $i = 1, \ldots, n$, равен одному из двух значений (0 или 1), причем вне зависимости от значений других разрядов.
Поэтому число способов построить набор из E_2^n (а значит, и число наборов в E_2^n) равно 2^n.
Следовательно, $|E_2^n| = 2^n$.

$\square$

Слои множества E_2^n

Набор из E_2^n называется **нулевым**, если все его разряды равны нулю, и **единичным**, если все его разряды равны единице.

Весом $|\alpha|$ набора $\alpha \in E_2^n$ называется число его единичных разрядов. Отметим, что $0 \leqslant |\alpha| \leqslant n$, причем вес, равный 0, — только у нулевого набора; а вес, равный n, — только у единичного набора.

Пусть $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$. Множество

$$E_2^{n,k} = \{\alpha \in E_2^n \mid |\alpha| = k\},$$

т. е. множество всех наборов из E_2^n с весом, равным k, называется k**-м слоем** куба E_2^n.

Слои множества E_2^n

Пример.

1. Перечислим все наборы из слоя $E_2^{3,2}$:

$$(0,1,1),\quad (1,0,1),\quad (1,1,0).$$

Всего найдется 3 набора в слое $E_2^{3,2}$.

2. Перечислим все наборы из слоя $E_2^{4,2}$:

$$\begin{array}{ccc} (0,0,1,1), & (0,1,0,1), & (0,1,1,0), \\ (1,0,0,1), & (1,0,1,0), & (1,1,0,0). \end{array}$$

Всего найдется 6 наборов в слое $E_2^{4,2}$.

Мощность k-го слоя множества E_2^n

Предложение 1.2. *Если $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$, то $|E_2^{n,k}| = C_n^k$, где C_n^k обозначает биномиальный коэффициент из n по k.*

Доказательство.
Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^{n,k}$.
Подсчитаем, сколькими способами можно построить такой набор α.
Можно выбрать k разрядов из всех n разрядов и построить набор α, в котором выбранные разряды равны 1, а остальные разряды равны 0.
Поэтому число способов построить набор из $E_2^{n,k}$ (а значит, и число наборов из $E_2^{n,k}$) совпадает с числом выборов k разрядов из n разрядов, т. е. с C_n^k.
Следовательно, $|E_2^{n,k}| = C_n^k$.

$\square$

Соседние и противоположные наборы из E_2^n

Наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ называются **соседними**, если они отличаются только в одном разряде. При этом если они отличаются в i-м разряде, то их также называют **соседними в i-м разряде**, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Например, если $n = 3$, то наборы $(0, 0, 1)$ и $(1, 0, 1)$ являются соседними (в первом разряде).

Наборы $\alpha, \beta \in E_2^n$ называются **противоположными**, если они отличаются во всех n разрядах. Отметим, что для любого $\alpha \in E_2^n$ противоположный ему набор определен однозначно; обозначим его $\bar{\alpha}$.

Например, если $n = 3$ и $\alpha = (0, 0, 1)$, то $\bar{\alpha} = (1, 1, 0)$.

Единичный n-мерный куб

Множество E_2^n, $n \geqslant 1$, можно изображать в виде следующей диаграммы (фигуры на плоскости).

На плоскости $\mathbb{R}^2$ выбирают $n+1$ параллельных прямых $l_0, l_1, \ldots, l_n$, на одинаковом расстоянии друг от друга.

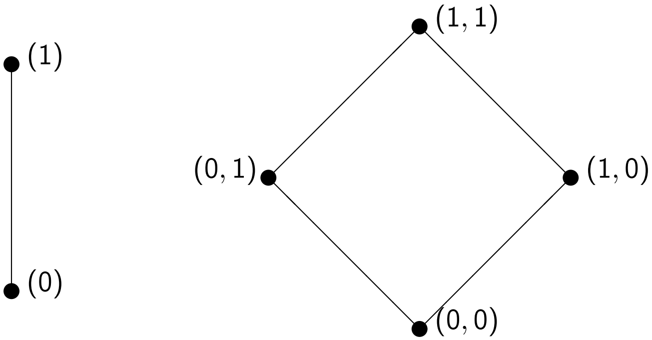
На прямой l_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, выбирают C_n^k различных точек и сопоставляют им наборы k-го слоя $E_2^{n,k}$, причем разным точкам — различные наборы.

Затем все пары точек, которым сопоставлены соседние наборы, соединяются отрезками.

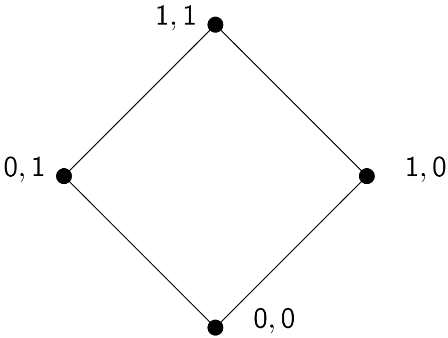
Полученную диаграмму (фигуру на плоскости) будем также называть единичным n-мерным кубом.

При этом точки, соответствующие наборам, называют также вершинами куба, а отрезки, соединяющие пары соседних наборов, — ребрами куба.

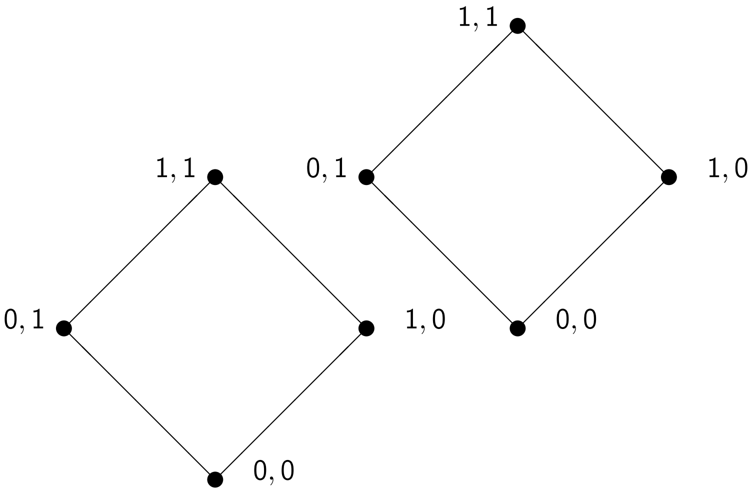
Одномерный и двумерный кубы



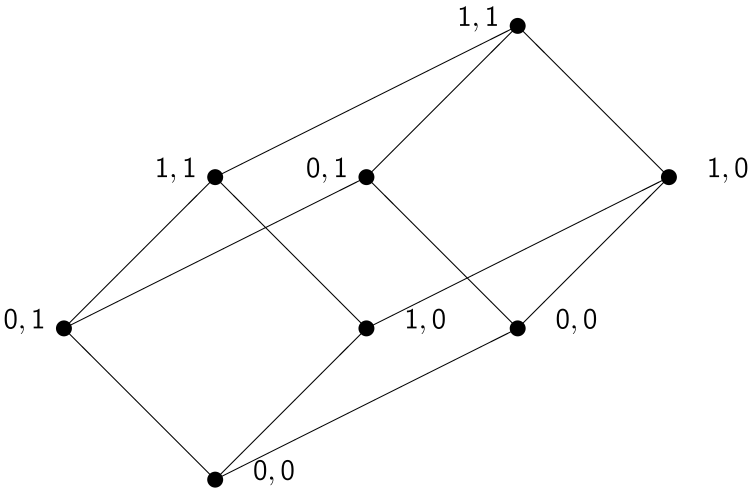
Трехмерный куб



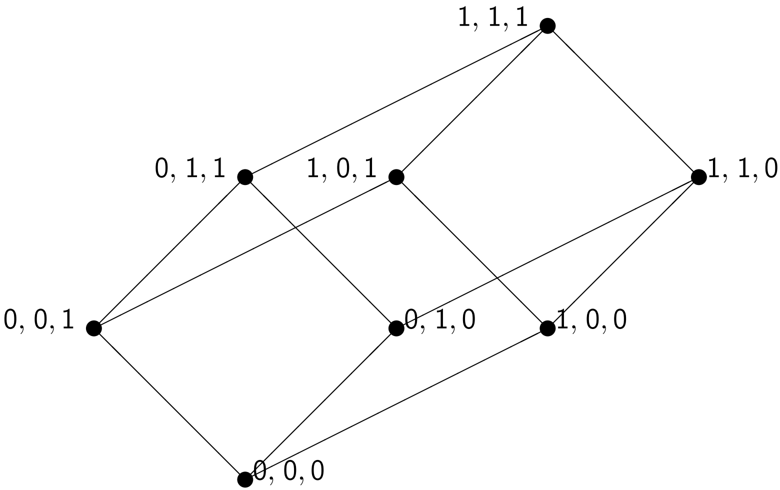
Трехмерный куб



Трехмерный куб



Трехмерный куб



Лексико-графический порядок на E_2^n

Номером $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_2$ набора $\alpha \in E_2^n$ назовем целое неотрицательное число, для которого запись в двоичной системе счисления имеет вид $\alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Другими словами,

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i}.$$

Отметим, что $0 \leqslant (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_2 \leqslant 2^n - 1$.

(Линейное) упорядочивание наборов из E_2^n в порядке возрастания их номеров назовем **лексико-графическим** (или **алфавитным**) порядком на E_2^n.

Лексико-графический порядок на E_2^n

Пример. Перечислим все наборы из E_2^3 в лексико-графическом порядке. В следующей таблице в левом столбце указаны числа от 0 до $7 = 2^3 - 1$, а в правом столбце — соответствующие наборы из E_2^3:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_2$	$\alpha \in E_2^3$
0	$(0, 0, 0)$
1	$(0, 0, 1)$
2	$(0, 1, 0)$
3	$(0, 1, 1)$
4	$(1, 0, 0)$
5	$(1, 0, 1)$
6	$(1, 1, 0)$
7	$(1, 1, 1)$

Функция алгебры логики

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. **Функцией алгебры логики** местности n называем произвольное отображение из E_2^n в E_2, $n \geqslant 1$.

Т. е. если $f : E_2^n \to E_2$, то f — *n-местная функция алгебры логики*.

При этом если $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, то говорим, что f — функция n переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Функции алгебры логики

Множество всех n-местных функций алгебры логики обозначаем $P_2^{(n)}$, $n \geqslant 1$.

Множество всех функций алгебры логики обозначаем P_2, т. е. $P_2 = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} P_2^{(n)}$.

Таблица истинности

Как можно задавать функции алгебры логики?

1. Таблицы истинности (таблицы значений). Упорядочим все наборы из множества E_2^n в **лексико-графическом** порядке и сопоставим каждому набору значение функции $f \in P_2^{(n)}$ на нем:

x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\dots$	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	$\dots$	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
	$\dots$			
1	$\dots$	1	0	$f(1, \dots, 1, 0)$
1	$\dots$	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Вектор значений

2. Если считать, что все наборы из E_2^n упорядочены лексико-графически, то функция $f \in P_2^{(n)}$ однозначно задается правым столбцом ее таблицы истинности. Назовем его **вектором значений** функции f и обозначим α_f. Другими словами,

$$\alpha_f = (f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_{2^n-1})) \in E_2^{2^n},$$

где наборы $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1}$ из E_2^n перечислены в лексико-графическом порядке.

Функции алгебры логики

Некоторые важные функции алгебры логики имеют собственные названия.

$n = 1$:

x	0	x	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

0 — **константа** 0;

x — **тождественно равная** x;

$\bar{x}$ — **отрицание** x;

1 — **константа** 1.

Функции алгебры логики

$n = 2$:

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$	x_1 / x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Слева направо по порядку: **конъюнкция**, **дизъюнкция**, **сложение по модулю** 2, **импликация**, **эквивалентность**, **штрих Шеффера**, **стрелка Пирса**.

Конъюнкцию & будем также обозначать точкой $\cdot$ или знак операции пропускать.

Знаки $\bar{\ }$, $\&$, $\cdot$, $\vee$, $\oplus$, $\to$, $\sim$, $/$, $\downarrow$ будем называть **связками**.

Функции алгебры логики

$n = 3$:

x_1	x_2	x_3	$m(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Функция $m(x_1, x_2, x_3)$ называется **функцией голосования**, или **медианой**.

Отметим, что функция $m(x_1, x_2, x_3)$ на наборе $\alpha \in E_2^3$ равна 0, если в наборе α больше нулей, чем единиц, и равна 1, если в наборе α больше единиц, чем нулей.

Число функций алгебры логики n переменных

Предложение 1.2. *При $n \geqslant 1$ верно равенство:* $|P_2^{(n)}| = 2^{2^n}$.

Доказательство.
Любую функцию $f \in P_2^{(n)}$ можно представить таблицей истинности, в которой 2^n строк.
В каждой строке (вне зависимости от других строк) находится 0 или 1 (значение f на соответствующем наборе).
Функций в $P_2^{(n)}$ столько же, сколько таких таблиц истинности.
Следовательно, $|P_2^{(n)}| = 2^{2^n}$.

$\square$

Существенная переменная

Введем понятие существенной переменной функции.

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, если найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in E_2$, что

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Несущественная переменная

Другими словами, переменная x_i — существенна для функции $f \in P_2$, если найдутся два соседних в i-м разряде набора, на которых функция f принимает различные значения.

Т. е. переменная x_i — существенна для функции $f \in P_2$, если все другие переменные можно так задать, что полученная функция одной переменной x_i принимает два значения: и 0, и 1 (т. е. не является константой).

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Существенные переменные

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y)$:

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Покажем, что для функции $f(x, y)$ переменная x является существенной. Действительно:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, 0) = 1.$$

Существенные переменные

Пример. Теперь покажем, что для функции $f(x, y)$ переменная y является несущественной.

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Действительно:

$$f(0, 0) = f(0, 1) = 0,$$
$$f(1, 0) = f(1, 1) = 1.$$

Несложно увидеть, что $f(x, y) = x$.

Формула

3. Функции алгебры логики можно задавать **формулами**.

Введем понятие **формулы** над множеством A, $A \subseteq P_2$.

Пусть A — множество функций алгебры логики (т. е. $A \subseteq P_2$), причем каждая функция из A имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

Пусть X — *конечное* множество переменных.

Формула

Формула над множеством A (с переменными из X) определяется по индукции.

1. *Базис индукции*. Если f — обозначение m-местной функции из A и $x_1, \dots, x_m$ — переменные (из X), причем не обязательно различные, то выражение $f(x_1, \dots, x_m)$ — формула.

2. *Индуктивный переход*. Если f — обозначение m-местной функции из A и $F_1, \dots, F_m$ — уже построенные формулы или переменные (не обязательно различные), то выражение $f(F_1, \dots, F_m)$ — формула.

Формулы со связками

Укажем особенности при построении формул, если A содержит функции со связками.

При построении формулы над A в таком случае записываем выражения следующим образом:

1) если $f = \bar{x}$, то $F = \overline{F_1}$;

2) если $f = x \circ y$, где $\circ \in \{\&, \cdot, \vee, \oplus, \to, \sim, /, \downarrow\}$, то

$$F = (F_1) \circ (F_2),$$

причем если F_i — переменная, то ее в скобки не заключаем, $i = 1, 2$.

Кроме того, в построенной формуле убираем некоторые скобки, считая, что конъюнкция имеет самый высокий приоритет среди двуместных связок.

Формулы

Пример. Пусть

$$A = \{0, 1, x, \bar{x}, x \cdot y, x \vee y, x \oplus y, x \to y, x \sim y, x/y, x \downarrow y\} \subseteq P_2.$$

Тогда

$F_1 = x \oplus y$	формула, построенная по базису индукции из функции $x \oplus y \in A$ и переменных x и y;
$F_2 = (x \oplus y) \cdot x$	формула, построенная по индуктивному переходу из функции $x \cdot y \in A$, формулы F_1 и переменной x;
$F_3 = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$	формула, построенная по индуктивному переходу из функции $\bar{x} \in A$ и формулы F_2;
	и т. д.

Формулы

Пусть F — формула над множеством A, $A \subseteq P_2$.

Если в формуле F встречаются только переменные $x_1, \ldots, x_n$ (но не обязательно все), то будем записывать $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Если при построении формулы F применялись только функции $g_1, \ldots, g_t \in A$ (но не обязательно все), то будем записывать $F[g_1, \ldots, g_t]$.

Формулу $F[g_1, \ldots, g_t]$ называем также **суперпозицией** функций $g_1, \ldots, g_t \in A$.

Выражение

Формулу или переменную будем называть *выражением*.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — выражение, в котором встречаются только переменные $x_1, \ldots, x_n$ (не обязательно все).

Если в выражение F вместо каждой переменной x_i подставить какое-то значение $\alpha_i \in E_2$, $i = 1, \ldots, n$, то можно посчитать *значение выражения на соответствующем наборе*.

Значение выражения на наборе

Значение $F(\alpha)$ выражения $F(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе $\alpha \in E_2^n$ определяется по индукции.

1. *Базис индукции*. Если $F = x_i$, где x_i — переменная, то

$$F(\alpha) = \alpha_i.$$

2. *Индуктивный переход*. Если $F = f(F_1, \ldots, F_m)$, где f — обозначение m-местной функции из A и $F_1, \ldots, F_m$ — формулы или переменные, то

$$F(\alpha) = f(F_1(\alpha), \ldots, F_m(\alpha)).$$

При этом пользуемся тем, что f обозначает какую-то функцию из A.

Значение выражения на наборе

Пример. Рассмотрим формулу $F_3 = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$ из предыдущего примера. Тогда:

x	y	$F_1 = x \oplus y$	$F_2 = (x \oplus y) \cdot x$	$F_3 = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Значения выражения F_3 на каждом наборе из E_2^2 записаны в самом правом столбце.

Функция, определяемая формулой

Следовательно, каждая формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ задает некоторую **функцию** $f_F \in P_2^{(n)}$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ (возможно, зависящую не от всех переменных существенно).

Представление функции формулой

Формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ **задает** (или **представляет**) функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$, если для любого набора $\alpha \in E_2^n$ справедливо равенство:

$$F(\alpha) = f(\alpha).$$

Если при этом $F = F[g_1, \ldots, g_t]$, то говорим, что функция f построена (или является) суперпозицией функций $g_1, \ldots, g_t$.

Эквивалентные формулы

Пусть F_1 и F_2 — формулы, в которых встречаются только переменные $x_1, \ldots, x_n$ (не обязательно все).

Если для любого набора $\alpha \in E_2^n$ верно $F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$, то формулы F_1 и F_2 называем **эквивалентными**.

Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$; при этом равенство $F_1 = F_2$ называем **тождеством**.

Тождества алгебры логики

Верны следующие тождества:

1) коммутативность связок $\cdot, \vee, \oplus, \sim, /, \downarrow$;

2) ассоциативность связок $\cdot, \vee, \oplus$;

3) дистрибутивность видов

$$(x \vee y) \cdot z = x \cdot z \vee y \cdot z;$$
$$(x \cdot y) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z);$$
$$(x \oplus y) \cdot z = x \cdot z \oplus y \cdot z.$$

Тождества алгебры логики

Тождества с одной переменной и с константами:

$$\begin{array}{lllll}
x \cdot x = x, & x \vee x = x, & x \oplus x = 0, & x \to x = 1; & \\
x \cdot \bar{x} = 0, & x \vee \bar{x} = 1, & x \oplus \bar{x} = 1, & \bar{x} \to x = x; & \\
x \cdot 0 = 0, & x \vee 0 = x, & x \oplus 0 = x, & 0 \to x = 1, & x \to 0 = \bar{x}; \\
x \cdot 1 = x, & x \vee 1 = 1, & x \oplus 1 = \bar{x}, & x \to 1 = 1, & 1 \to x = x.
\end{array}$$

Выражение одних связок через другие:

$$\begin{array}{ll}
x / y = \overline{x \cdot y}, & x \downarrow y = \overline{x \vee y}; \\
x \sim y = \overline{x \oplus y}, & x \sim y = (x \to y)(y \to x); \\
x \sim y = \bar{x}\bar{y} \vee xy, & x \sim y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}); \\
x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}, & x \oplus y = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y); \\
x \to y = \bar{x} \vee y, & x \to y = \overline{x\bar{y}}.
\end{array}$$

Тождества алгебры логики

Логические правила:

$x \cdot \bar{x} = 0$	правило противоречия;
$x \vee \bar{x} = 1$	правило исключенного третьего;
$\bar{\bar{x}} = x$	правило снятия двойного отрицания;
$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ и $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$	правила де Моргана.

Доказываются эти тождества прямой проверкой (нахождением значений на всех наборах выражений в левой и правой частях равенства).

Правила эквивалентной замены

Пусть G, H — формулы с переменными $y_1, \ldots, y_m$ и

$$G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = H(y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_m$ — формулы.

Тогда

$$G(F_1, F_2, \ldots, F_m) = H(F_1, F_2, \ldots, F_m).$$

Например, $x \to y = \bar{x} \vee y$ — тождество, $x \cdot y$ и $x \cdot z$ — формулы. Значит,

$$(x \cdot y) \to (x \cdot z) = \overline{x \cdot y} \vee (x \cdot z).$$

Правила эквивалентной замены

Пусть F — формула, причем

$$F = f(F_1, F_2, \dots, F_m),$$

где f — обозначение m-местной функции из $P_2^{(m)}$ и $F_1, F_2, \dots, F_m$ — формулы.

Пусть G_1 — формула и $G_1 = F_1$.

Тогда

$$f(G_1, F_2, \dots, F_m) = f(F_1, F_2, \dots, F_m).$$

Например, $(\bar{x} \vee \bar{y}) \oplus z$ — формула и $\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \cdot y}$. Значит,

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) \oplus z = \overline{x \cdot y} \oplus z.$$

Эквивалентные преобразования формул

Пользуясь правилами эквивалентной замены, можно от одних формул переходить к другим, эквивалентным исходным.

При этом говорит, что проводят **эквивалентные преобразования формул**.

Эквивалентные преобразования формул

Пример. Рассмотрим формулу $F_1 = x \vee \bar{x} \cdot y$.

Применим тождество $x \cdot 1 = x$:

$$F_1 = x \vee \bar{x} \cdot y \quad = \quad x \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot y = F_2.$$

Далее применим тождество $1 \vee y = 1$:

$$F_2 = x \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot y \quad = \quad x \cdot (1 \vee y) \vee \bar{x} \cdot y = F_3.$$

Затем применим тождество $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$:

$$F_3 = x \cdot (1 \vee y) \vee \bar{x} \cdot y \quad = \quad (x \cdot 1 \vee x \cdot y) \vee \bar{x} \cdot y = F_4.$$

Теперь применим тождество $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$:

$$F_4 = (x \cdot 1 \vee x \cdot y) \vee \bar{x} \cdot y \quad = \quad x \cdot 1 \vee (x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y) = F_5.$$

Эквивалентные преобразования формул

Далее применим тождество $x \cdot 1 = x$:

$$F_5 = x \cdot 1 \vee (x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y) \quad = \quad x \vee (x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y) = F_6.$$

Затем применим тождество $(x \vee y) \cdot z = x \cdot z \vee y \cdot z$:

$$F_6 = x \vee (x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y) \quad = \quad x \vee (x \vee \bar{x}) \cdot y = F_7.$$

Теперь применим тождество $\bar{x} \vee x = 1$:

$$F_7 = x \vee (x \vee \bar{x}) \cdot y \quad = \quad x \vee 1 \cdot y = F_8.$$

Применим тождество $1 \cdot y = y$:

$$F_8 = x \vee 1 \cdot y \quad = \quad x \vee y = F_9.$$

При этом формулы $F_1, F_2, \ldots, F_9$ — эквивалентны.

В частности,

$$x \vee \bar{x} \cdot y = x \vee y.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, что таблицу всех наборов из E_2^n, $n \geqslant 1$, в лексикографическом порядке можно построить следующим способом: для каждого $i = 1, \dots, n$, начиная с первой строки таблицы, повторить 2^{i-1} раз: в i-м разряде в 2^{n-i} строках написать 0, затем в следующих 2^{n-i} строках написать 1.