

Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Функция алгебры логики

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$, называется функцией алгебры логики, если

$$f : E_2^n \rightarrow E_2.$$

Множество всех функций алгебры логики обозначается P_2 .

Функции алгебры логики

Некоторые функции алгебры логики.

$n = 1$:

x	0	x	\bar{x}	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

0 — константа 0;

x — тождественно равная x ;

\bar{x} — отрицание x ;

1 — константа 1.

Функции алгебры логики

$n = 2$:

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$	x_1 / x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Слева направо по порядку: конъюнкция, дизъюнкция, сложение по модулю 2, импликация, эквивалентность, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

Конъюнкцию $\&$ будем также обозначать точкой \cdot или знак операции пропускать.

Формула

Пусть $A \subseteq P_2$, причем каждая функция из A имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное множество переменных.

Формула над множеством A с переменными из X определяется по индукции.

Базис индукции. Если f — обозначение m -местной функции из A и x_{i_1}, \dots, x_{i_m} — переменные из X (не обязательно различные), то выражение $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ — формула.

Индуктивный переход. Если f — обозначение m -местной функции из A и F_1, \dots, F_m — уже построенные формулы или переменные из X , то выражение $f(F_1, \dots, F_m)$ — формула.

Функция, определяемая формулой

Если $F = F(x_1, \dots, x_n)$ — формула с переменными x_1, \dots, x_n , то она задает некоторую **функцию** из P_2 , которую обозначим $f_F = f_F(x_1, \dots, x_n)$.

Значение функции f_F на наборе $\alpha \in E_2^n$ находится по индукции.

Базис индукции. Если $F = x_i$, где x_i — переменная, то

$$f_F(\alpha) = \alpha_i.$$

Индуктивный переход. Если $F = f(F_1, \dots, F_m)$, где f — обозначение m -местной функции из A и F_1, \dots, F_m — формулы или переменные, то

$$f_F(\alpha) = f(f_{F_1}(\alpha), \dots, f_{F_m}(\alpha)).$$

Пользуемся тем, что f обозначает какую-то функцию из A .

Переменная или ее отрицание

Если $\sigma \in E_2$, то введем обозначение: $x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1; \\ \bar{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$

Отметим, что $x^\sigma = 1$ в том и только в том случае, когда $x = \sigma$.

Дизъюнктивное разложение функции по переменным

Теорема. При $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_2^n$ и подставим его в левую и правую части равенства из утверждения. Получаем:

$$f(\alpha) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Дизъюнктивное разложение функции по переменным

Рассмотрим набор $\beta \in E_2^k$, где $\beta_i = \alpha_i$ для всех $i = 1, \dots, k$.
Отметим, что σ пробегает все наборы из множества E_2^k , а β — какой-то набор из E_2^k .

1. Если $\sigma \neq \beta$, то найдется такое i , $1 \leq i \leq k$, что $\sigma_i \neq \alpha_i$.
Значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, откуда в этом случае:

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot 0 \cdot \alpha_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = 0.$$

2. Если $\sigma = \beta$, то для всех i , $i = 1, \dots, k$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$. Поэтому в этом случае:

$$1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = 0 \vee \dots \vee 0 \vee f(\alpha) \vee 0 \vee \dots \vee 0 = f(\alpha).$$

Совершенная ДНФ

Теорема (о совершенной ДНФ). Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $f \neq 0$, может быть представлена в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), а именно, в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n: f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Совершенная ДНФ

Доказательство. Дизъюнктивно разложим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ по всем n переменным:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma).$$

Отметим, что σ пробегает все наборы из множества E_2^n .

1. Если $f(\sigma) = 0$, то

$$x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot 0 = 0.$$

2. Если $f(\sigma) = 1$, то

$$x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot 1 = x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Следовательно,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n: f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Совершенная ДНФ

Пример. Найдём совершенную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 4–9.