

Графы, деревья. Свойства деревьев. Алгоритм построения остовного дерева. Оценка числа деревьев.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

(Неориентированным) графом G называется пара (V, E) , где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена неупорядоченная пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Будем рассматривать **графы без петель и кратных ребер**.

Другими словами, без ребер вида $e = (v, v)$, где $v \in V$, которые называются *петлями*, и без ребер вида $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, которые называются *кратными ребрами*.

Изоморфизм графов

Два графа без петель и кратных ребер

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее ребра, т. е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется соотношение:

$$(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Пути в графах

Путем (или **маршрутом**) в графе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m) -**путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{m-1} e_m v_m,$$

в которой $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$ для каждого $j = 1, \dots, m$, $m \geq 0$.

Длина пути — число m его ребер.

Цепь — путь без повторений ребер.

Простая цепь — цепь без повторений вершин.

Циклы в графах

Замкнутый путь — путь, в котором $m \geq 1$ и первая и последняя вершины совпадают.

Цикл — замкнутый путь без повторений ребер.

Простой цикл — цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны.

Подграфы

Граф $H = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Подграф $H = (V, E')$ графа $G = (V, E)$, т. е. **подграф, содержащий все вершины графа G** , называется его **остовным подграфом**.

Граф $G = (V, E)$ называется **связным**, если для каждой пары вершин $v, w \in V$ в графе G найдется (v, w) -путь.

Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его **компонентой связности**.

Простейшие свойства графов

Предложение.

1. Если в k связному графу добавить ребро, соединяющее какие-то две несмежные его вершины, то полученном графе найдется цикл.
2. Если в связном графе удалить ребро, принадлежащее какому-то циклу, то останется связный граф.

Предложение. Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер с p вершинами, q ребрами и s компонентами связности. Тогда

- 1) $s \geq p - q$;
- 2) если в графе G отсутствуют циклы, то $s = p - q$.

Деревом называется связный граф без циклов.

Теорема (о равносильных определениях дерева). Пусть $G = (V, E)$ — граф с p вершинами и q ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) G — дерево, т. е. связный граф без циклов;
- 2) G — связный граф и $q = p - 1$;
- 3) G — граф без циклов и $q = p - 1$;
- 4) G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл;
- 5) G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

Дано: G — связный граф без циклов.

Доказать: G — связный граф и $q = p - 1$.

Обоснование. По условию G связный.

По условию G без циклов, поэтому по соотношению для G между числом вершин p , числом ребер q и числом компонент связности $s = 1$ получаем: $1 = s = p - q$.

Значит, $q = p - 1$.

Доказательство. $2 \Rightarrow 3$.

Дано: G — связный граф и $q = p - 1$.

Доказать: G — граф без циклов и $q = p - 1$.

Обоснование. По условию $q = p - 1$.

Если в связном графе G найдется цикл, то удалим из G некоторое ребро e из цикла. Останется связный граф G' . По соотношению для G' между числом вершин p , числом ребер $q - 1$ и числом компонент связности $s' = 1$ получаем:
 $s' \geq p - (q - 1) = (p - q) + 1 = 2$ — противоречие.

Значит, G без циклов.

Доказательство. $3 \Rightarrow 4$.

Дано: G — граф без циклов и $q = p - 1$.

Доказать: G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.

Обоснование. По условию G без циклов.

По соотношению для G между числом вершин p , числом ребер q и числом компонент связности s получаем:

$s = p - q = 1$, т. е. G связный.

Значит, при соединении в G любой пары несмежных вершин ребром появится цикл.

Доказательство. $4 \Rightarrow 5$.

Дано: G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.

Доказать: G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

Обоснование. Если G не связный, то при соединении двух вершин из разных компонент связности цикл не появится. Значит, G связный.

Пусть при удалении из G некоторого ребра e остался связный граф G' . Тогда G получается из связного графа G' добавлением нового ребра e . Поэтому в G найдется цикл — противоречие.

Значит, при удалении из G любого ребра останется несвязный граф.

Доказательство. $5 \Rightarrow 1$.

Дано: G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

Доказать: G — связный граф без циклов.

Обоснование. По условию G связный.

Если в G найдется цикл, то удалим из G любое ребро из цикла. Останется связный граф —противоречие.

Значит, G без циклов.



Остовные деревья

Остовным деревом связного графа называется его остовный подграф, являющийся деревом.

Теорема. *В любом связном графе найдется остовное дерево.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф.

Покажем, что в графе G можно пошагово построить остовное дерево.

Остовные деревья

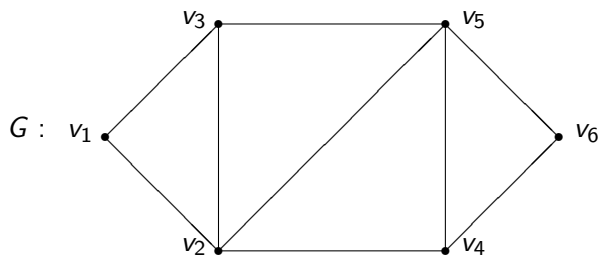
Доказательство. Пусть H — какой-то остовный связный подграф графа G , например, сам граф G .

1) Если в подграфе H нет циклов, то он является остовным деревом графа G .

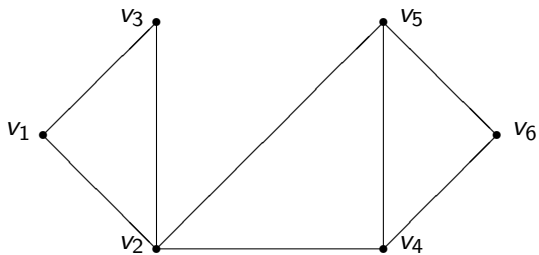
2) Иначе **выберем в графе G произвольное ребро $e \in E$, принадлежащее какому-то циклу подграфа H .** Повторим рассуждения 1–2 для остовного подграфа, получающегося из H удалением ребра e , который также является связным.

Т. к. на каждом шаге разрываем хотя бы один цикл графа G , а циклов конечное число, то через конечное число шагов получим подграф без циклов. Он является остовным деревом D графа G .

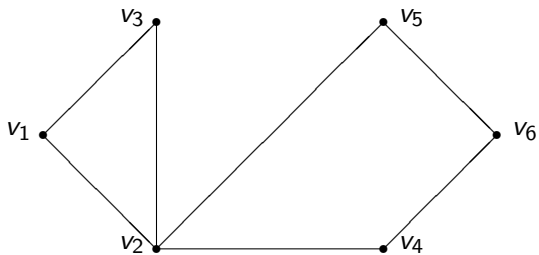
Построение остовного дерева



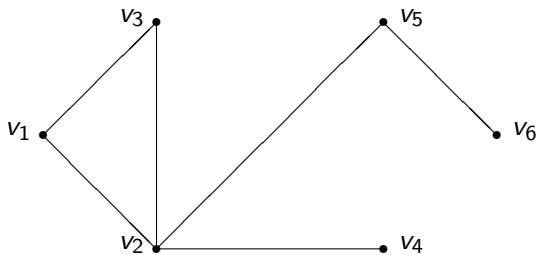
Построение остовного дерева



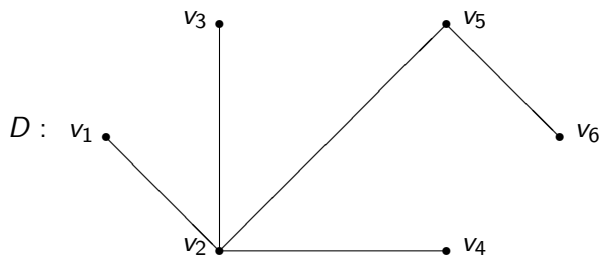
Построение остовного дерева



Построение остовного дерева



Построение остовного дерева



Обход в глубину в дереве

Пусть $D = (V, E)$ дерево и $v_0 \in V$. **Обходом в глубину** из вершины v_0 назовем следующий обход дерева D :

- 1) по непройденному ребру $(v_0, v_i) \in E$ перейти в непройденное поддереве D_i , обойти его в глубину из вершины v_i и по ребру (v_0, v_i) вернуться в вершину v_0 ;
- 2) если пройдены все поддеревья, то закончить обход.

Оценка числа деревьев

Теорема. Для числа $\delta(q)$ неизоморфных деревьев с q ребрами справедлива оценка:

$$\delta(q) \leq 4^q.$$

Доказательство. Пусть $D = (V, E)$ — дерево с q ребрами и $v_0 \in V$. Обойдем дерево D в глубину из вершины $v_0 \in V$. При таком обходе по каждому ребру пройдем два раза: первый раз при переходе в соответствующее поддереву, второй раз при возвращении из него.

Оценка числа деревьев

Доказательство. По этому обходу построим код дерева D — набор $k(D)$ из нулей и единиц длины $2q$. Сначала этот код не заполнен. При проходе по очередному ребру заполняем в коде $k(D)$ первый незаполненный разряд по следующим правилам:

- 1) если по ребру переходим в поддереву, то в код $k(D)$ пишем ноль;
- 2) если по ребру возвращаемся из поддерева, то в код $k(D)$ пишем единицу.

Тогда различным деревьям соответствуют разные коды.

Поэтому $\delta(q)$ не превосходит числа наборов из нулей и единиц длины $2q$, т. е.

$$\delta(q) \leq 2^{2q} = 4^q.$$



1. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 26–32.