

# Функции алгебры логики. Критерий полноты системы функций алгебры логики.

Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

# Функция алгебры логики

Пусть  $E_2 = \{0, 1\}$ . Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 1$ , называется функцией алгебры логики, если

$$f : E_2^n \rightarrow E_2.$$

Множество всех функций алгебры логики обозначается  $P_2$ .

# Полная система

Пусть  $A \subseteq P_2$ . Множество  $A$  называется **полной системой**, если **формулами над множеством  $A$  можно выразить любую функцию алгебры логики**.

**Предложение.** Система  $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$  является полной.

# Замыкание множества

Пусть  $A \subseteq P_2$ . **Замыканием**  $[A]$  множества  $A$  называется множество всех функций, которые могут быть выражены формулами над  $A$ .

Множество  $A$  называется **замкнутым классом**, если  $[A] = A$ .

# Функции, сохраняющие константу, и линейные функции

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  **сохраняет 0**, если

$$f(0, \dots, 0) = 0.$$

Множество всех функций, сохраняющих 0, обозначим  $T_0$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  **сохраняет 1**, если

$$f(1, \dots, 1) = 1.$$

Множество всех функций, сохраняющих 1, обозначим  $T_1$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  называется **линейной**, если найдутся такие  $c_0, c_1, \dots, c_n \in E_2$ , что

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n.$$

Множество всех линейных функций обозначим  $L$ .

# Самодвойственные и монотонные функции

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  называется **самодвойственной**, если

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}.$$

Множество всех самодвойственных функций обозначим  $S$ .

Если  $\alpha, \beta \in E_2^n$ , то  $\alpha \leq \beta$  при  $\alpha_i \leq \beta_i$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  называется **монотонной**, если **для любых наборов  $\alpha, \beta \in E_2^n$  из  $\alpha \leq \beta$  следует  $f(\alpha) \leq f(\beta)$ .**

Множество всех монотонных функций обозначим  $M$ .

# Замкнутость $T_0$ , $T_1$ , $L$ , $S$ , $M$

**Теорема.** Каждое из множеств  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $M$  является замкнутым классом, не совпадающим с  $P_2$ .

# Три вспомогательные леммы

**Лемма 1 (о несамодвойственной функции).** Если  $f \notin S$ , то, подставляя вместо ее переменных функции  $x, \bar{x}$ , можно получить функцию, равную константе.

**Лемма 2 (о немонотонной функции).** Если  $f \notin M$ , то, подставляя вместо ее переменных функции  $0, 1, x$  можно получить функцию  $\bar{x}$ .

**Лемма 3 (о нелинейной функции).** Если  $f \notin L$ , то, подставляя вместо ее переменных функции  $0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}$  можно получить функцию  $x \cdot y$  или функцию  $\overline{x \cdot y}$ .



# Теорема Поста

**Теорема (Поста).** Пусть  $A \subseteq P_2$ . Множество  $A$  является полной системой тогда и только тогда, когда  $A$  не содержится ни в одном из классов  $T_0, T_1, L, S, M$ , т. е.

$$A \not\subseteq T_0, A \not\subseteq T_1, A \not\subseteq L, A \not\subseteq S, A \not\subseteq M.$$

# Теорема Поста

**Доказательство.** 1. *Необходимость* обоснуем от обратного: пусть  $A$  является полной системой, но содержится в одном из классов  $T_0, T_1, L, S, M$ , например, пусть  $A \subseteq T_0$ .

Тогда получаем:

$$[A] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2.$$

Приходим к противоречию.

Значит,  $A$  не может содержаться ни в одном из классов  $T_0, T_1, L, S, M$ .

# Теорема Поста

**Доказательство.** 2. *Достаточность.* Пусть  $A$  не содержится в одном из классов  $T_0, T_1, L, S, M$ . Докажем, что в этом случае  $A$  — полная система.

Из условия непринадлежности  $A$  к каждому из перечисленных классов следует, что в  $A$  найдутся такие функции

$$f_0, f_1, f_l, f_s, f_m,$$

что

$$f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_l \notin L, f_s \notin S, f_m \notin M.$$

Отметим, что функции  $f_0, f_1, f_l, f_s, f_m$  не обязательно все различны.

# Теорема Поста

**Доказательство.** Покажем, что формулами над  $A$  можно выразить все функции из полной системы  $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$ .

# Теорема Поста

**Доказательство.** 2.1. Построение констант 0 и 1.

Рассмотрим функции  $f_0 \notin T_0$  и  $f_1 \notin T_1$ . Положим:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f_0(x, \dots, x), \\ \varphi_1(x) &= f_1(x, \dots, x).\end{aligned}$$

Тогда:

$x$	$\varphi_0$	$\varphi_1$
0	1	$b$
1	$a$	0

Теперь если  $a = 1$  и  $b = 0$ , то  $\varphi_0(x) = 1$ ,  $\varphi_1(x) = 0$ .

Если же  $a = 0$  или  $b = 1$ , то получена функция  $\bar{x}$ . Тогда по лемме о несамодвойственной функции из  $f_5 \notin S$ , подставляя вместо ее переменных функции  $x$ ,  $\bar{x}$ , получаем некоторую константу  $c \in E_2$ , а затем  $\bar{c} \in E_2$ .

Константы 0 и 1 построены.

# Теорема Поста

**Доказательство.** 2.2. Построение отрицания  $\bar{x}$ .

По лемме о немонотонной функции из  $f_m \notin M$ , подставляя вместо ее переменных функции 0, 1,  $x$ , получаем отрицание  $\bar{x}$ .

Отрицание  $\bar{x}$  построено.

# Теорема Поста

**Доказательство.** 2.3. Построение конъюнкции  $x \cdot y$ .

По лемме о нелинейной функции из  $f_l \notin L$ , подставляя вместо ее переменных функции  $0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}$  и, возможно, навешивая отрицание над функцией, получаем конъюнкцию  $x \cdot y$ .

Конъюнкция  $x \cdot y$  построена.

# Теорема Поста

**Доказательство.** Значит, формулами над  $A$  можно выразить все функции из полной системы  $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$ .

Следовательно, система  $A$  — полна.





1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 9–10, 18–22.