III. Синтез и сложность управляющих систем

15. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в разделе 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть $\mathfrak{U}$ — один из введенных в разделе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ F можно реализовать некоторой его схемой Σ, а Ψ — какой-либо функционал сложности схем класса $\mathfrak{U}$, то есть отображение $\mathfrak{U}$ во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством **монотонности**, то есть $\Psi(\Sigma) \geqslant \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathfrak{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер (ср.с вопросом 6 раздела 1). Все введенные в разделе 2 функционалы сложности этим свойством обладают.

Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе $\mathcal{U}$ как минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из $\mathcal{U}$, которые реализуют F. При этом схема Σ, принадлежащая классу $\mathcal{U}$, которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется **минимальной схемой** в классе $\mathcal{U}$ относительно функционала Ψ. В силу монотонности функционала Ψ, минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда функционал Ψ совпадает с введенным в разделе 2 функционалом L (D, R, и т. д.), будем называть **сложностью** (соответственно **глубиной**, **рангом**, и т. д.) **системы ФАЛ** F.

Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

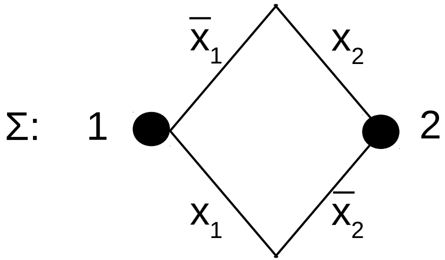
которая, обычно, называется **функцией Шеннона для класса** $\mathcal{U}$ **относительно функционала сложности** Ψ.

В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\mathrm{A}}$ (вида $\mathcal{U}^{\mathrm{A}}$) будем обозначать через $\Psi_{\text{Б}}^{\mathrm{A}}(F)$ (соответственно $\Psi^{\mathrm{A}}(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через $\Psi_{\text{Б}}^{\mathrm{A}}(n)$ (соответственно $\Psi^{\mathrm{A}}(n)$). В обозначениях классов $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\mathrm{C}}$, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс Б вида Б_0 будем, как обычно, опускать.

На семинарских занятиях мы установим, что имеют место равенства

$$L^{\pi}(x_1 \oplus x_2) = L^{K}(x_1 \oplus x_2) = L^{\Phi}(x_1 \oplus x_2) = L^{C}(x_1 \oplus x_2) = 4.$$

Верхние оценки этих равенств дает формула $\mathcal{F}(x_1, x_2)$ и π-схема $\Sigma(x_1, x_2)$ такие, что $\mathcal{F} = (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{(x_1 \cdot x_2)}$,



Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функционалами сложности и функциями Шеннона. Очевидно, что для сложностей $\Psi'(F)$ и $\Psi''(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классах схем $\mathfrak{U}'$ и $\mathfrak{U}''$ соответственно, где $\mathfrak{U}' \supseteq \mathfrak{U}''$, а также для функций Шеннона $\Psi'(n)$ и $\Psi''(n)$ выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leqslant \Psi''(F), \quad \Psi'(n) \leqslant \Psi''(n).$$

В частности,

$$\Psi_{\text{Б}}^{\mathrm{C}}(F) \leqslant \Psi_{\text{Б}}^{\Phi}(F) \quad \text{и} \quad L^{\mathrm{C}}(n) \leqslant L^{\Phi}(n), \quad \Psi^{\mathrm{K}}(F) \leqslant \Psi^{\pi}(F), \quad L^{\mathrm{K}}(n) \leqslant L^{\pi}(n).$$

Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют π-схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и. т. п.

Приведенный выше пример реализации линейной ФАЛ $x_1 \oplus x_2$ в классах $\mathcal{U}^C, \mathcal{U}^\Phi, \mathcal{U}^K, \mathcal{U}^\pi$ показывает, что ее сложность во всех классах одинакова и равна 4, хотя $\mathcal{U}^\Phi \subset \mathcal{U}^C$ и $\mathcal{U}^\pi \subset \mathcal{U}^K$.

Это, однако, скорее исключение, чем правило. Так, можно показать, что $L^K(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) = 8$, $L^\pi(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) = 10$.

При этом, как оказалось,

$$L^\pi(2) = L^K(2) = 4;$$

$$L^K(3) = 8, \quad L^\pi(3) \geqslant 10.$$

Заметим, что для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} L(f_i) \leqslant L(F) \leqslant \sum_{i=1}^{m} L(f)_i\,.$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

Утверждение 15.1

Для любой функции алгебры логики $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, и π-схема Σ_f, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2n \cdot |N_f| - 1, \qquad L(\Sigma_f) \leqslant n\,|N_f|\,. \tag{15.1}$$

Следствие 1

В силу (15.1), *с учетом того, что ФАЛ* 0 *можно реализовать* π*-схемой сложности* 2, *а также формулой из* $\mathfrak{U}^{\Phi}$, *имеющей сложность* 2, *выполняются неравенства*

$$L^{\mathrm{C}}(n) \leqslant L^{\Phi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^{\mathrm{K}}(n) \leqslant L^{\pi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n}.$$

Следствие 2

В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из Утв. 8.1 раздела 2 справедливо неравенство

$$D(n) \leqslant n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

Утверждение 15.2

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π-схема Σ_f и формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, которые реализуют f и для которых, наряду с (15.1), справедливы также неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^n + |N_f| - 2, \qquad L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Доказательство. В качестве Σ_f можно взять π-схему, которая получается из $(1, 2^n)$-КД порядка n от БП $x_1, \ldots, x_n$ (рис. 15.1) в результате снятия тех его выходов, где реализуются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ f.

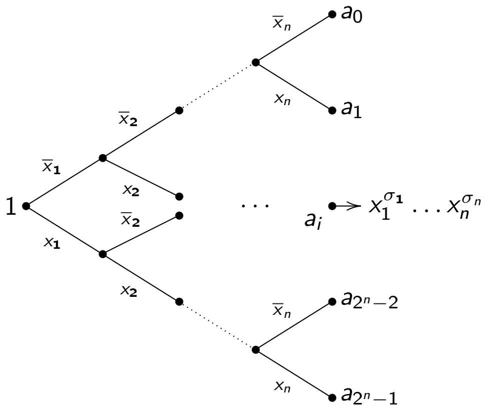


Рис.: $(2^n, 1)$-контактное дерево порядка n

В нем производится отождествление остальных выходов КД и переход к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула $\mathcal{F}_f$ получается в результате моделирования построенной π-схемы Σ_f в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. раздел 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \qquad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где $L^-(\Sigma_f)$ — число размыкающих контактов в схеме Σ.

Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка n равно $2^n - 1$.

Утв. доказано. □

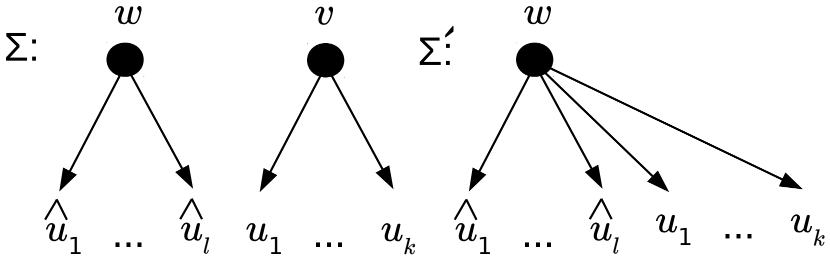
Следствие

$$L^{\pi}(n) \leqslant 2^{n+1} - 2, \tag{15.2}$$

$$L^{\Phi}(n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 4. \tag{15.3}$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v, а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v, объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v. Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ **операции присоединения вершины v к вершине w**.



Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются **эквивалентными**, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ Σ операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ Σ', которая, очевидно, эквивалентна Σ.

Приведенная схема называется **строго приведенной**, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения (отождествления) вершин в КС, на которую не накладываются какие-либо ограничения, связанные с их достижимостью.

Вершины u и v КС $\Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q)$ считаются **эквивалентными**, если для каждого i, $i \in [1, p]$, ФАЛ проводимости от a_i к v и от a_i к u совпадают. При этом в результате отождествления эквивалентных вершин в КС Σ получается КС Σ', которая эквивалентна Σ.

Приведенная КС Σ называется **строго приведенной**, если в ней нет эквивалентных вершин.

Для множества ФАЛ G, $G \subseteq P_2(n)$, через $\overrightarrow{G}$ будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества G, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$ будем называть **универсальной системой** порядка n.

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка n, то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\overline{\ell}_n$;
2. мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка n;
3. дешифратора[1] $\overrightarrow{Q}_n$ (дизъюнктивного дешифратора[2] $\overrightarrow{J}_n$) порядка n;
4. универсальной системы $\overrightarrow{P}_2(n)$ порядка n.

[1] $Q_n = \{x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} : (\sigma_1 \ldots \sigma_n) \in B^n\}$
[2] $J_n = \{x_1^{\sigma_1} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} : (\sigma_1 \ldots \sigma_n) \in B^n\}$

Утверждение 15.3

Для каждого натурального n в $\mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\mathrm{C}}$ существует СФЭ U_n, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$ и сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Доказательство. В силу полноты базиса, в $\mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\mathrm{C}}$ существует система формул Σ от БП $x_1, \ldots, x_n$, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна Σ и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. раздел 2).

Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ U_n, включая n ее входов, равно 2^{2^n} и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Утв. доказано. $\square$

Следствие

$$L_{\text{Б}}^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \leqslant 2^{2^n} - n.$$

16. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Рассмотрим сначала простейшие нижние оценки сложности ФАЛ и связанные с ними примеры минимальных схем.

Утверждение 16.1

Если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n - 1, \qquad L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n. \tag{16.1}$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i, $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n \qquad (\text{соответственно } L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n + k). \tag{16.2}$$

Утверждение 16.2

Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$*, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant m \qquad (\textit{соответственно } L^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}(F) \geqslant m). \tag{16.3}$$

Доказательство:

Второе из неравенств (16.3) вытекает из того, что все ФАЛ f_i, $i = 1, \ldots, m$, реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов. Пусть теперь Σ_F — приведенная $(1, m)$-КС, реализующая систему ФАЛ F. Из приведенности Σ_F и условий леммы вытекает, что Σ_F — связный граф с не менее чем $(m + 1)$ вершиной, и поэтому для числа его ребер выполняется неравенство

$$|E(\Sigma_f)| = L\left(\Sigma_F\right) \geqslant \left|V\left(\Sigma_F\right)\right| - 1 \geqslant m.$$

Утв. доказано.

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n,$$
$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n,$$
$$L^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - 2.$$

Замечание 1

В силу следствия универсальная СФЭ U_n, построенная в Утв. 15.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$.

- *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу `http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс)`).
- *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007.
- *Алексеев В. Б.* Лекции по дискретной математике. — М.: МГУ, 2004.